Institutionen för matematik
Tekniska högskolan

Metsalo

Mat-1.451 / Mat-1.1510 Svenskspråkig grundkurs i matematik 1

Tentamen, 11.5.2009

Fyll i tydligt *på varje svarpapper* samtliga uppgifter. På *förhörskod och -namn* skriv kursens kod, namn samt *slutförhör* eller *mellanförhör* med ordningsnummer. Utbildningsprogrammen är ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KJO, KTA, KON, MAK, MAR, PUU, RAK, TFY, TIK, TLT, TUO, YHD.

Observera att olika (del-)uppgifter kan ge olika antal poäng!
Ange TYDLIGT om det är Mat-1.451 (gamla Grundkurs 1, som förelästes sista gången hösten -04; 6sv) eller Mat-1.1510 (nya Grundkurs 1, som förelästes första gången hösten -05; 10sp) som ni skriver!
Vid denna tentamen får varken räknare eller tabellsamlingar användas. Fråga, om ni misstänker att det förekommer något tryckfel!

1. a) Linjen L är skärningslinjen mellan planen $P_1 : x+y+z=1$ och $P_2 : x+2y+5z=3$. I vilken punkt skär linjen L planet $P_3 : x-2y+z=0$? (3p.)
   b) Visa att om A är en inverterbar $n \times n$-matris, så är även A:s transponatmatris A^T inverterbar och $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$. (3p.)

2. a) Komplexkonjugatet $\overline{z}$ av ett komplext tal $z = x+yi$ (där som bekant $i^2 = -1$) definieras som $\overline{z} = x - yi$. Visa att $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$. (2p.)
   b) Ge $\sqrt{-8i}$ på formen $x+yi$ (dvs. bestäm alla komplexa tal z sådana att $z^2 = -8i$). (2p.)
   c) Ge $\sqrt[3]{-8i}$ på formen $x+yi$ (dvs. bestäm alla komplexa tal z sådana att $z^3 = -8i$). (2p.)
   (Förenkla svaren! Lämna t.ex. inte uttryck på formen $\sqrt{9}$ eller $\cos 0$, utan skriv i stället 3 resp. 1.)

3. a) Bestäm parametern a så att gränsvärdet $\lim_{x\to 0} \frac{e^{3x}-\sqrt{1+ax}}{x^2}$ blir ett ändligt tal b. (2p.)
   b) Bestäm detta ändliga gränsvärde $b = \lim_{x\to 0} \frac{e^{3x}-\sqrt{1+ax}}{x^2}$ för parametervärdet a från föregående deluppgift. (2p.)
   c) Funktionen $g(x) = \frac{e^{3x}-\sqrt{1+ax}}{x^2}, 0 < |x| < 1/|a|, g(0) = b$ med a och b från de tidigare deluppgifterna är kontinuerlig i origo, eftersom dess gränsvärde är lika med dess funktionsvärde där. Beräkna $g'(0)$. (2p.)

4. För $x > 0$ definierar vi $F(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}$. (Detta medför att F är naturliga logaritmen, men det hör egentligen inte till uppgiften och skall inte heller användas i lösningen!) Visa att definitionen av funktionen F medför att $F(a) + F(b) = F(a \cdot b)$ för $a, b > 0$. (3p.)

5. I denna uppgift studerar vi rotationsparaboloiden, som uppstår då parabeln $z = 4(1-(x/6)^2) = 4 - x^2/9, 0 \le x \le 6$ roterar kring z-axeln.
   a) Beräkna volymen hos området mellan rotationsparaboloiden och xy-planet. (3p.)
   b) Bestäm radien r och höjden h hos den räta cirkulära cylindern med maximal volym, som ryms mellan rotationsparaboloiden och xy-planet så att dess axel är z-axeln (se figuren). (3p.)
   c) Området i a)-delen begränsas nedtill av en cirkelskiva med radien 6 och arean 36π. Upptill begränsas den av rotationsparaboloiden. Beräkna rotationsparaboloidens area. (3p.)