Mat-1.1040 Matematiikan peruskurssi L4, kevät 2009

3. välikoe 6.5.2009

1. Olkoon V jatkuvien funktioiden $[0,1] \to \mathbb{R}$ avaruus normilla $\|v\|_\infty = \max_{t\in[0,1]} |v(t)|$ varustettuna ja

$$(Ky)(t) = \int_0^1 k(t,s)y(s)\, ds,$$

missä $k : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ on jatkuva. Tutki ovatko seuraavat väitteet tosia vai epätosia. Jos väite on tosi, niin pelkkä vastaus riittää ja jos väite on epätosi, niin perustele vastaus lyhyesti.

   (a) V on täydellinen eli sen jokainen Cauchyn jono on suppeneva.

   (b) K on rajoitettu lineaarikuvaus $K : V \to V$.

   (c) Jos $M = \max_{t,s\in[0,1]} |k(t,s)| \leq 1$, niin yhtälöllä $y = Ky + f$ on olemassa yksikäsitteinen ratkaisu kaikilla $f \in V$.

   (d) Jos ydin k on degeneroinut, eli muotoa $k(t,s) = \sum_{j=1}^n a_j(t)\overline{b_j(s)}$, niin kiinnitetyllä $\mu \in \mathbb{C}$ yhtälöllä $(I - \mu K)y = 0$ on olemassa vain triviaaliratkaisu $y = 0$.

   (e) Fredholmin alternatiivi on voimassa operaattorille $K : V \to V$.

   (f) Jos K on itseadjungoitu eli, jos $k(t,s) = \overline{k(s,t)}$, niin K:n kaikki ominaisarvot ovat reaalisia.

2. Miten diskretoisit differenssimenetelmällä reuna-arvotehtävän

$$\begin{aligned} -u''(x) + qu(x) &= f(x), \quad x \in (0,1), \\ u(0) &= u(1) = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

missä $q \geq 0$ ja f on jatkuva? Nimeä lisäksi jokin menetelmä (suora tai iteratiivinen) syntyneen lineaarisen yhtälöryhmän ratkaisemiseksi.

3. Kun yksidimensioinen lämpöyhtälö $u_t = u_{xx}$ on diskretoitu paikkamuuttujan suhteen, on päädytty tavalliseen differentiaaliyhtälöön $\mathbf{u}_h'(t) = \mathbf{\Delta}_h \mathbf{u}_h(t)$, missä $\mathbf{\Delta}_h$:n ominaisarvojen tiedetään olevan välillä $(-4/h^2, 0)$.

   (a) Esitä jokin yksiaskelmenetelmä tämän diskretoimiseksi ajan suhteen valitsemalla aika-askel $\delta > 0$ ja merkitsemällä $\mathbf{u}_h^k$:lla $\mathbf{u}_h(k\delta)$:n approksimaatiota, missä $k = 0, 1, 2, \ldots$

   (b) Millä aika-askeleen $\delta > 0$ arvoilla menetelmäsi on stabiili eli tuottaa rajoitettuja ratkaisuja, joille $\mathbf{u}_h^k \to \mathbf{0}$, kun $k \to \infty$? Perustele.

   Vihje: $\lim_{k\to\infty} \mathbf{B}^k = \mathbf{0} \iff |\lambda| < 1$ kaikilla $\mathbf{B}$:n ominaisarvoilla λ.

4. Tarkastellaan reuna-arvotehtävää (1), kun $q = 0$.

   (a) Millainen on tehtävän variaatioformulaatio? Entä miten määritellään sen ratkaisun u Ritz-Galerkin approksimaatio u_h?

   (b) Mitataan virhettä $u - u_h$ normilla

$$|||u - u_h|||^2 = \langle u' - u_h', u' - u_h' \rangle = \int_0^1 \left(u'(x) - u_h'(x)\right)^2 dx.$$

   Osoita, että

$$|||u - u_h|||^2 = |||u|||^2 - |||u_h|||^2.$$

   Geometrinen tulkinta?