

## Tik-106.4100 Algoritmien suunnittelu ja analyysi, syksy 2006 Tentti, 14.12.2006

Kirjoita jokaisen palauttamasi paperin yläreunaan selvästi "T-106.4100 Algoritmien suunnittelu ja analyysi, 14.12.2006", nimesi, opiskelijanumerosi ja koulutusohjelmasi sekä palauttamiesi paperien kokonaismäärä.

1. a) (3p) Mitkä seuraavista väittämistä pitävät paikkansa ja mitkä eivät? Perustele lyhyesti! (Lyhyt sanallinen perustelu riittää, tarkkoja matemaattisia todistuksia ei vaadita.)
  - i.  $7n^2 + 8n \log n + 4n \in O(n^3)$
  - ii.  $3n^2 + 11 \in \Omega(n^3)$
  - iii.  $8n^3 + 5n^2 + 100000 \in \Theta(n^3)$
- b) (3p) Selitä, mitä tasoitettu vaativuus (amortized complexity) tarkoittaa ja miten se voidaan laskea pankkitili- eli potentiaalimenetelmällä. Suositeltu vastauksen pituus on noin yksi sivu.

2. a) (3p) Ratkaise seuraava rekursioyhtälö, kun  $n$  on kahden potenssi. Anna täsmällinen ratkaisu (suuruusluokka ei riitä).

$$T(n) = \begin{cases} 1, & \text{kun } n = 1 \\ 3T(n/2) + 2n^2 & \text{kun } n > 1 \end{cases}$$

- b) (3p) Arvaa hyvä ratkaisu seuraavalle palautuskaavalle ja todista ratkaisusi oikeaksi induktiolla ( $c_1$  ja  $c_2$  ovat vakioita ja  $n$  kahden potenssi).

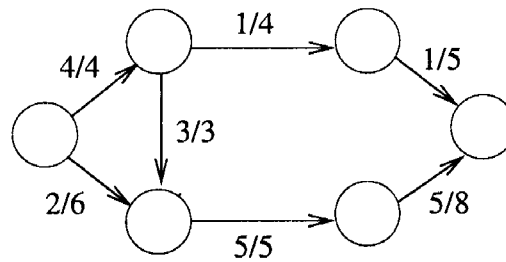
$$T(n) \leq \begin{cases} c_1, & \text{kun } n = 1 \\ T(n/2) + c_2 & \text{kun } n > 1 \end{cases}$$

3. a) (2 p) Miksi Union-Find-rakenteissa pyritään siihen, että yhtä joukkoa kuvaava puurakenne on mahdollisimman matala?
- b) (1 p) Miten tähän tavoitteeseen pyritään Find-operaation suorittamisen yhteydessä (mainitse vain yksi tapa)? Esitä kuvan avulla esimerkki tällaisesta Find-operaatiosta.
- c) (3 p) Selitä, miten minimin poisto tapahtuu toisaalta binomikeosta ja toisaalta Fibonacci-keosta. Mitkä ovat operaation pahimman tapauksen aikavaativuudet näissä rakenteissa? Perustele aikavaativuustulokset lyhyesti.

4. (6 p.) Tarkastellaan seuraavaa ongelmaa:  $n$  sanaa, joiden pituudet ovat  $l_1, l_2, \dots, l_n$  halutaan tulostaa annetussa järjestyksessä peräkkäisille riveille mahdollisimman kauniisti (määritelty myöhemmin). Sanat tulostetaan siten, että kahden samalla rivillä olevan peräkkäisen sanan välissä on tasan yksi välilyönti. Riville mahtuu  $M$  merkkiä. Jos riville tulostettavista sanoista ja niitä erottavista välilyönneistä tulee yhteensä vähemmän kuin  $M$  merkkiä, tulostetaan rivin loppuun ylimääräisiä välilyönnejä tarvittava määrä. Mahdollisimman kauniissa tulostuksessa rivien loppuissa olevien ylimääräisten välilyöntien määrän kuutioiden summa, siis summa  $\sum_{i=1}^k t_i^3$  on mahdollisimman pieni. Lausekkeessa  $t_i$  on  $i$ :nnen rivin lopussa olevien ylimääräisten välilyöntien määrä ja  $k$  tulostuksessa tarvittavien rivien määrä (huomaa, että rivien määrä vaihtelee sen mukaan, mihin rivinvaihdot on päätetty sijoittaa). Esitä periaate dynaamiseen ohjelmointiin perustuvalle algoritmille, joka laskee, miten sanat pitää tulostuksessa jakaa eri riveille, jotta tulostus olisi mahdollisimman kaunis. Älä kirjoita algoritmiasi pseudokoodina, vaan selitä vain sen periaate sekä se, miten ja missä järjestyksessä tarvittavien lausekkeiden arvot lasketaan. (Tehtävän helpottamiseksi myös viimeisen rivin lopussa olevat ylimääräiset välilyönnit otetaan huomioon minimoitavassa summassa, vaikka käytännössä olisi järkevää jättää ne pois.)

**Viimeinen tehtävä toisella sivulla**

5. Tämä tehtävä liittyy verkon maksimaalisen virtauksen laskemiseen. Tarkastellaan alla annettua verkkoa. Verkossa on jo virtausta siten kuin kuvassa on esitetty (kunkin kaaren kohdalle on merkitty kaarta pitkin kulkeva virtaus ja kaaren kapasiteetti).



- (2p) Piirrä kuvassa annettua virtausta vastaava jäännösverkko (engl. residual network). Selitä parilla virkkeellä, mikä on jäännösverkon merkitys.
- (2p) Etsi jäännösverkon avulla verkosta yksi täydennyspolku (engl. augmenting path) ja määritä sitä vastaava täydennys. (Voit etsiä täydennyspolun suoraan ilman kerrosverkkoa.) Merkitse täydennyspolku joko a-kohdan kuvaan tai piirrä se erikseen. Piirrä lisäksi alkuperäinen verkko sen jälkeen, kun virtausta on kasvatettu täydennyspolulla.
- (2p) Onko verkon virtaus maksimaalinen sen jälkeen, kun olet kasvattanut virtausta b-kohdassa? Perustele vastauksesi parilla virkkeellä.

**Muista vastata kurssin palautekyselyyn kurssin kotisivulla!**