

Tehtävät 1- 4 suoritetaan ensin tukimateriaalin kanssa (klo 10 -13) ja sen jälkeen tehtävät 5 - 6 ilman mitään tukimateriaalia (klo 13 -14). Tukimateriaalina saa olla mitä tahansa, mukaanlukien omakätiset muistiinpanot, mutta ei laskuharjoitustehtäviä ratkaisuihin eikä laskuharjoitusmonistetta 151 (tai 147 tai 135). Opisto- ja AMK-insinöörit suorittavat halutessaan vain tehtävät 1-4. Kunkin vastauspaperin yläreunaan tulee tällöin merkitä selvästi sana **INSINÖÖRI**.

1. Vaakasuorassa teräsputkessa, jonka ulko- ja sisähalkaisijat ovat  $d_u = 26$  mm ja  $d_s = 20$  mm, virtaa lämpötilassa  $70^\circ\text{C}$  ja normaali-ilmanpaineessa olevaa vettä  $0,5$  l/s. Putki on eristämätön ja ulkopinnaltaan valkoiseksi maalattu. Putkea ympäröivän huoneilman ja huoneen seinien lämpötila on noin  $20^\circ\text{C}$  ( $= T_\infty$ ).

a) Laske siirtyvä lämpöteho putken pituusyksikköä kohden putkesta ympäristöön (W/m). Vapaalle konvektiolle vaakasuoran putken ulkopinnalla voidaan käyttää kaavaa

$$Nu = 0,48(Gr \cdot Pr)^{1/4},$$

missä Grashofin luku on määritelty putken ulkohalkaisijan mukaan

$$Gr = \frac{\beta g \rho^2 d_u^3 (T_s - T_\infty)}{\eta^2}.$$

Ideaalikaasulle  $\beta = 1/T$  (lämpötila  $T$  Kelvin-asteissa), ja tässä voit käyttää  $T = (T_s + T_\infty)/2$ .

Voit olettaa, että ulkopinnan lämpötila  $T_s$  on hyvin lähellä veden lämpötilaa.

Osoita lopuksi että näin on eli ulkopinnan lämpövästus on täysin määräävä.

b) Laske veden jäähtymä putkimetriä kohden ( $^\circ\text{C}/\text{m}$ ).

c) Laske painehäviö putkimetriä kohden (Pa/m).

2. Ilma tulee kompressoriin tilassa ( $20^\circ\text{C}$ , 1 bar) ja poistuu siitä tilassa ( $100^\circ\text{C}$ , 5 bar). Ilman tilavuusvirta kompressorin imuaukossa on  $0,5$  m<sup>3</sup>/s ja kompressorin ottama akseliteho on 100 kW. Kompressoria jäähdytetään kiertoöljyllä ( $c_p = 2000$  J/kg $^\circ\text{C}$ ), jonka lämpötila nousee kompressorissa  $25^\circ\text{C}$ :sta  $70^\circ\text{C}$ :een. Kompressorin jälkeen öljy jäähdytetään erillisellä lämmönvaihtimella takaisin  $25^\circ\text{C}$ :een.

a) Laske tarvittava jäähdytysöljyn massavirta (kg/s) ja öljyn jäähdyttimen teho (W).

b) Laske kompressorissa tapahtuva entropian generointi (W/K). Öljyvirtauksen painehäviötä ei tarvitse ottaa huomioon. Huomaa, että ilma- ja öljyvirta yhdessä muodostavat adiabaattisen systeemin.

c) Laske paineilman tuottamiseen tarvittava ominaisenergian kulutus ko. kompressorille (J/kg) ja vertaa sitä teoreettiseen arvoon, kun puristus tapahtuu isotermisesti.

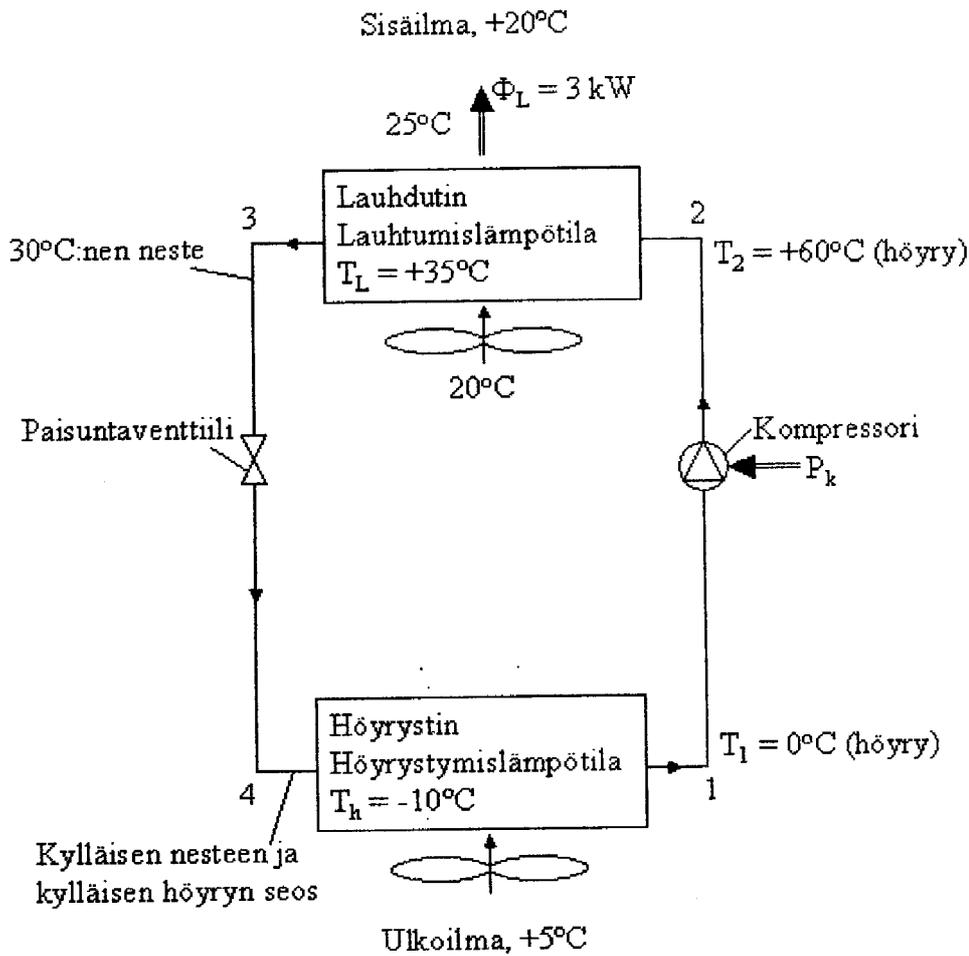
3. Hydraulikkamoottoriin johdetaan 18 l/min 120 bar:in paineessa olevaa öljyä, jonka lämpötila on  $35^\circ\text{C}$ . Öljyn paine moottorin jälkeen on 2 bar.

a) Laske moottorin akseliteho, kun hydraulikkamoottorin isentrooppinen hyötysuhde on 0,7.

b) Laske öljyn lämpötila hydraulikkamoottorin jälkeen, kun  $\rho = 0,82$  kg/l,

$$\partial\rho/\partial T = -10^{-4} \text{ kg/lK} \text{ ja } c_p = 1950 \text{ J/kgK}.$$

4. Oheinen kuva esittää ulkoilmalämpöpumpun joka siirtää lämpöä  $+5^{\circ}\text{C}$ :sta ulkoilmasta  $20^{\circ}\text{C}$ :een sisäilmaan lauhtutinteholla  $3\text{ kW}$ .

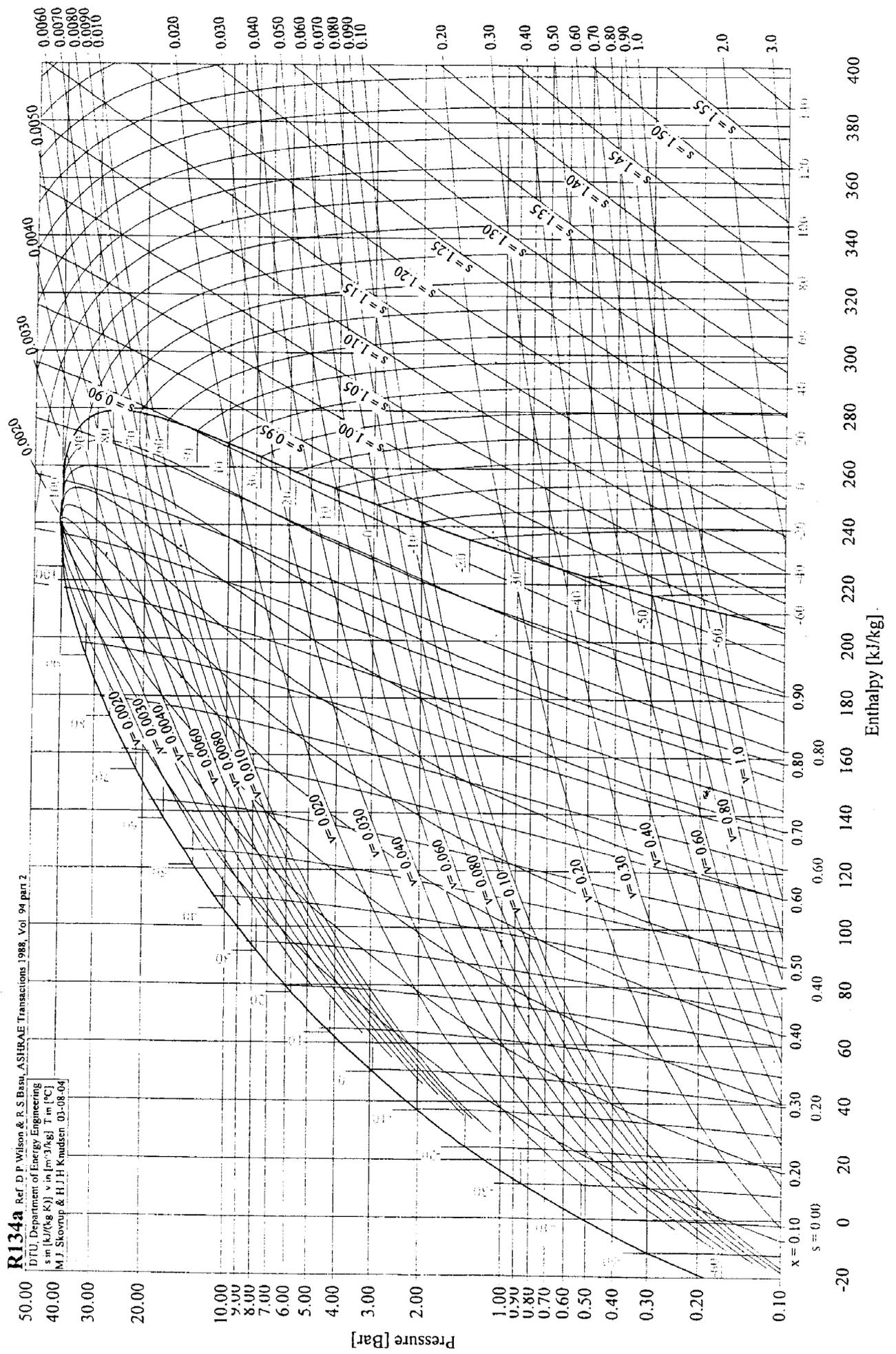


Käytä tehtävässä hyväksi oheista kylmäaineen R134a log p,h - piirrosta ja vastaa seuraaviin:

- Määritä höyrytyspaine  $p_h$  ja lauhtumispaine  $p_L$ .
- Piirrä kylmäaineen prosessi oheiseen log p,h - diagrammiin. (Repäise diagrammi irti kysymyspaperista, kirjoita siihen nimesi ja opiskelijanumerosi ja palauta se vastauspapereiden mukana.)
- Määritä kylmäaineen massavirta  $\dot{m}$  ja kompressorin imuaukkoon menevä tilavuusvirta ( $\text{m}^3/\text{s}$ ).
- Määritä kompressorin akseliteho  $P_k$ .
- Määritä lämpökerroin  $\epsilon = \Phi_L/P_k$ .
- Määritä höyryn massaosuus  $x_4$  paisuntaventtiilin jälkeen.
- Laske sellaisen lämpöpumpun, joka siirtää lämpöä ulkoilman lämpötilasta sisäilman lämpötilaan, termodynaamisesti paras mahdollinen lämpökerroin.

30. (jatkoa) Kylmäaineen R134a log p, h - diagrammi [19].

Entalpiian ja entropian nollapisteenä on kylläinen neste lämpötilassa -40°C.



## LITE

### Enc-39-2001 Termodynamiikka ja lämmönsiirto

#### JOHDATUSTA LÄMMÖNSIIRTO-OPPIIN Markku J. Lampinen ja Voitto W. Kotiaho

Monisteissa olevat viittaukset ovat seuraaviin teoksiin:

- Kurssikirja: Markku J. Lampinen: Termodynamiikan perusteet, Otatieto 582
- Taulukkirja: Kotiaho, Lampinen, Seppälä: Termodynamiikan ja lämmönsiirto-opin aineominaisuustaulukoita. Sov. term. labor. raportti 136.

Lämpö voi siirtyä kolmella eri tavalla: *Konduktiolla* eli johtumalla, *konvektiolla* ja *säteilyinä*. Konduktio tapahtuu kiinteässä aineessa, konvektio *fluidissa* (liikkuvalle aineelle kuten nesteelle tai kaasulle käytetään yleisnimitystä fluidi) ja säteily puolestaan voi tapahtua myös tyhjiössä. Seuraavassa tarkastellaan kutakin lämmönsiirtymistyyppiä erikseen.

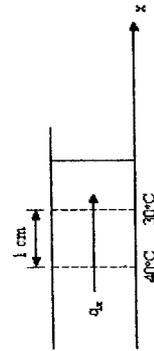
### LÄMMÖN JOHTUMINEN

Poikkipinta-alayksikön läpi siirtyvää  $[W/m^2]$  lämpövirtaa aineessa kuvataan Fourierin lämmönjohtumisyhtälöllä, joka yksidimensioisessa tapauksessa on:

$$q_x = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \quad (1)$$

Kuvassa 1 on esimerkki 1-dimensioisesta konduktiosta. Aineen läpi menee x-suunnassa joka kohdassa yksi ja sama lämpövirta  $q_x$ , joka on siis vakio. Samoin aineen lämmönjohtavuus  $\lambda$ , joka on aineominaisuus, on yleensä vakio. Täten lämpötilagradientti voidaan laskea seuraavasti:

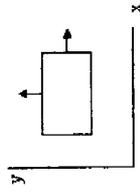
$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{30^\circ\text{C} - 40^\circ\text{C}}{10^{-2}\text{ m}} = -10^3 \text{ }^\circ\text{C/m} = -10^3 \text{ K/m}$$



Kuva 1. Yksidimensioinen konduktio.

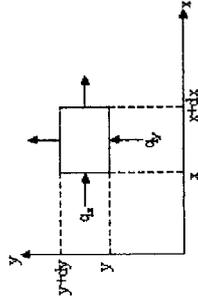
2 - dimensioisessa tapauksessa, kuva 2, voidaan kirjoittaa Fourierin yhtälöt erikseen x- ja y-suunnille seuraavasti jolloin lämpötila on x:n ja y:n funktio:  $T = T(x,y)$ :

$$\begin{aligned} q_x &= -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \\ q_y &= -\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \end{aligned} \quad (2)$$



Kuva 2. 2-dimensioinen konduktio.

Tarkastellaan 2-dimensioista konduktiota differentiaalisena alkion läpi, kuva 3.



Kuva 3. 2-dimensioinen konduktio differentiaalisena alkion läpi.

Alkiolle voidaan kirjoittaa seuraavat yhtälöt:

$$q_x(\text{kohdassa } x) = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}$$

$$q_x(\text{kohdassa } x + dx) = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left( -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} + (-\lambda) \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dx \quad (3)$$

$$q_y(\text{kohdassa } y) = -\lambda \frac{\partial T}{\partial y}$$

$$q_y(\text{kohdassa } y + dy) = -\lambda \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left( -\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) dy = -\lambda \frac{\partial T}{\partial y} + (-\lambda) \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} dy$$

missä yhtälöt kohdissa  $x+dx$  ja  $y+dy$  perustuvat Taylorin sarjakehitelmään. Kum kerrotaan kukin näistä poikkipinta-alalla, jonka läpi kyseinen lämpövirta siirtyy, saadaan:

$$\Phi_x(\text{kohdassa } x) = \left[ -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right] \cdot (dy \cdot L)$$

$$\Phi_x(\text{kohdassa } x + dx) = \left[ -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} + (-\lambda) \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dx \right] \cdot (dy \cdot L)$$

$$\Phi_y(\text{kohdassa } y) = \left[ -\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right] \cdot (dx \cdot L)$$

$$\Phi_y(\text{kohdassa } y + dy) = \left[ -\lambda \frac{\partial T}{\partial y} + (-\lambda) \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} dy \right] \cdot (dx \cdot L) \quad (4)$$

Stationaarisessa tilanteessa se lämpövirta, joka menee alkioon sisään, täytyy tulla sitä myös ulos jolloin pätee energiataase

$$[\Phi_x(x) + \Phi_y(y)] - [\Phi_x(x+dx) + \Phi_y(y+dy)] = 0 \quad (5)$$

ja kun sijoitetaan tähän yhtälöt (4) saadaan:

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0. \quad (6)$$

Yleisemmässä tilanteessa osa lämmöstä varastoituu alkioon:

$$[\Phi_x(x) + \Phi_y(y)] - [\Phi_x(x+dx) + \Phi_y(y+dy)] = dx dy L \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (7)$$

missä termi  $dx dy L \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}$  on massa  $\times$  ominaislämpö  $\times$  lämpötilan muutos/aikayksikkö.

Yhtälöistä (4) ja (7) saadaan (vrt. kurssikirjan kaava (2311)):

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{\rho c_p}{\lambda} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (8)$$

Määritetään osittaisdifferentiaaliyhtälöiden, kuten (6) ja (8), ratkaisemisesta se perussasia että ennen ratkaisemista pitää asettaa reunaehdot ja vastata senjälkeen ratkaisun löytyminen on käytännössä ylipäänsä mahdollista.

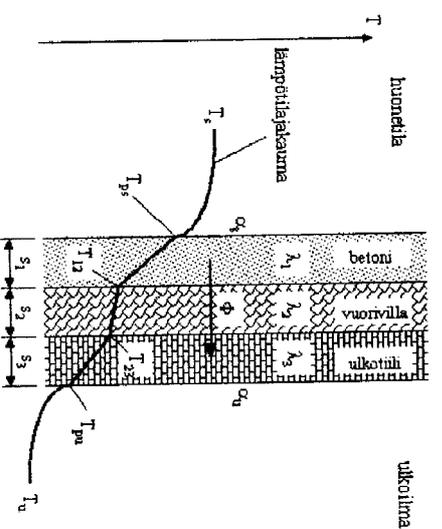
Kurssikirjan kaavassa (232) on opettu huomioon lisäksi konvektio, eli lämmön siirtyminen liikkuvassa aineessa eli fluidissa. Konvektioon palataan myöhemmin.

### Yksidimensioinen konduktio monikerroksisen seinän läpi

Tarkastellaan seinärakennetta, joka koostuu betonista (1), vuorivillasta (2) ja ulkotiilestä (3) (kuva 5). Vastaaavat lämmönjohtavuudet eri materiaaleille ovat  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ . Johdetaan kurssikirjan sivulla 23 oleva kaava kokonaislämmönläpäisyluvulle:

$$k = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_s} + \frac{s_1}{\lambda_1} + \frac{s_2}{\lambda_2} + \frac{s_3}{\lambda_3} + \frac{1}{\alpha_u}} \quad (9)$$

$\alpha_s$  ja  $\alpha_u$  ovat ns. konvektiivisia lämmönsiirtokerroimia joiden avulla otetaan huomioon se, että pinnan lämpötila ei ole sama kuin pintaa vasten olevan fluidin lämpötila kaukana pinnasta. Kuvan 5 tapauksessa huoneilmasta sisäpintaan ja ulkopinnasta ulkoilmaan tapahtuu konvektiivinen lämmönsiirto, johon palataan myöhemmin.



Kuva 5. Lämmön johtuminen seinärakenteen läpi ja lämpötilajakauma. Huomi! Oikeassa talonrakentamisessa pitää vuorivillan ja ulkotiilen välillä jättää parin sentin ilmaväli jotta kosteus pääsee tuuletuttamaan vuorivillasta pois.

Olkoon  $T_s > T_u$  jolloin pinta-alaa kohti lasketun lämpövirran  $q = \dot{Q}/A = \Phi/A$  suunta on sisästä ( $T_s$ ) ulkoilmaan ( $T_u$ ) ja sille pätee seuraava yhtälöketju:

$$q = \alpha_s (T_s - T_{ps}) = \lambda_1 \frac{T_{ps} - T_{12}}{s_1} = \lambda_2 \frac{T_{12} - T_{23}}{s_2} = \lambda_3 \frac{T_{23} - T_{pu}}{s_3} = \alpha_u (T_{pu} - T_u). \quad (10)$$

Kun ratkaistaan yhtälöketjusta lämpötilaerot, saadaan:

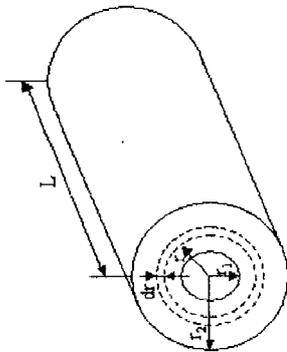
$$\begin{aligned} T_s - T_{ps} &= \frac{1}{\alpha_s} q, \\ T_{ps} - T_{12} &= \frac{s_1}{\lambda_1} q, \\ T_{12} - T_{23} &= \frac{s_2}{\lambda_2} q, \\ T_{23} - T_{pu} &= \frac{s_3}{\lambda_3} q, \\ T_{pu} - T_u &= \frac{1}{\alpha_u} q. \end{aligned} \quad (11)$$

Kun ylläolevat yhtälöt lasketaan puolitain yhteen ja ratkaistaan  $q$ , saadaan tulos josta lämmönläpäisyyn kaava (9) luontevasti seuraa:

$$q = \frac{T_s - T_u}{\frac{1}{\alpha_s} + \frac{s_1}{\lambda_1} + \frac{s_2}{\lambda_2} + \frac{s_3}{\lambda_3} + \frac{1}{\alpha_u}} = k (T_s - T_u). \quad (12)$$

Rakennuksen seinälle on yleensä käytännössä  $\alpha_s \approx 8 \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-1}$  ja  $\alpha_u \approx 20 \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-1}$ .

### Yksidimensionoinen konduktio putken seinämässä läpi



Kuva 6. Putken seinämä.

Fourierin lämmönjohtumisyhtälö (1) kirjoitettuna putken seinämässä erotetulle differentiaalisen paksuudelle alkiolle (kuva 6) muodoton:

$$q_r = A \frac{\partial T}{\partial r} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial r} \quad (13)$$

Pinta-ala  $A = 2 \pi r L$ , joten

$$\Phi = -\lambda \frac{\partial T}{\partial r} A = -\lambda \frac{\partial T}{\partial r} 2\pi r L.$$

Tästä saadaan

$$r \frac{\partial T}{\partial r} = -\frac{\Phi}{2\pi\lambda L} = \text{vakio}.$$

joten päädytään differentiaaliyhtälöön

$$dT = -\frac{\Phi}{2\pi\lambda L} \frac{dr}{r}.$$

Kun (14) integroidaan puolittain, saadaan

$$\int_{T_i}^{T_o} dT = -\frac{\Phi}{2\pi\lambda L} \int_{r_i}^{r_o} \frac{dr}{r},$$

josta seuraa lopulta

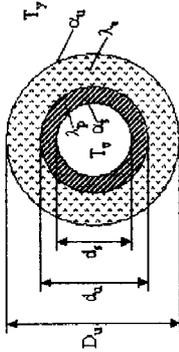
$$\Phi = \frac{\lambda 2\pi L}{\ln \frac{r_o}{r_i}} (T_i - T_o).$$

Kuva 7 esittää monikerroksista putkea jonka sisällä virtaa fluidi lämpötilassa  $T_p$  ja putken ympäristön lämpötila on  $T_y$ . Arvan vastaavalla tavalla, kuin edellä johdettuun kaava (9), voidaan putken lämmönläpäisykertoimelle/pituusyksikkö johtaa seuraava kaava:

$$\frac{1}{k_p} = \frac{1}{\pi d_s \alpha_s} + \frac{\ln(d_o/d_s)}{2\pi\lambda_p} + \frac{\ln(D_o/d_u)}{2\pi\lambda_c} + \frac{1}{\pi D_u \alpha_u} \quad (17)$$

jolloin lämpövirta putken seinämän läpi on

$$\Phi = k_p L (T_y - T_p). \quad (18)$$



Kuva 7. Monikerroksinen putki.

Kun putkea eristetään, niin on huomattava, että putken eristekerroksen liika suurentaminen saattaa johtaa lämmönläpäisyluvun suurenemiseen ja siis eristämisen huononemiseen. Tämän asian voi todeta yhtälön (17) avulla. Kun yhtälöstä ratkaistaan  $k_p$  ja ajatellaan se ulkoalkeisajan  $D_u$  funktioksi siten että pidetään muut suureet vakioina, niin on helppo todeta derivaamalla että  $k_p$ -llä on minimiarvo tietyillä optimaalisella  $D_u$ :n arvoilla.

### KONVEKTIIVINEN LÄMMÖNSIIRTO

Kun lämpö siirty johtamalla ja kuljettumalla liikkuvassa nesteessä tai kaasussa eli fluidissa, ja erityisesti fluidin ja sitä koskettava kiinteän pinnan välillä, puhutaan konvektiosta. Fysikaalisessa mielessä konvektiossa on yksinkertaisesti vain kyse siitä, että lämpö siirtyy ensin kiinteän konduktiolle, ja toiseksi kuljettumalla koska fluidin mukana liikkuu siihen varastoitunutta lämpöä. Konvektion matemaattinen mallintaminen on kuitenkin käytännössä niin monimutkaista, että konvektio joudutaan laskennallisessa mielessä käsittelemään kokonaan omana lämmönsiirtymismuotonaan.

Konvektio teorian varsinaisena ongelmana on aina lämmönsiirtokertoimen  $\alpha$  määrittäminen.

Lämmönsiirtokerroin  $\alpha$  määritellään yhtälöllä

$$q = \alpha (T_{\text{pinta}} - T_{\text{fluid}}), \quad (19)$$

missä  $q$  on lämmönsiirto fluidin ja kiinteän pinnan välillä [ $W/m^2$ ] ja  $T_{\text{fluid}}$  ja  $T_{\text{pinta}}$  on fluidin lämpötila kaukana pinnasta.

Lämmönsiirtokertoimelle on kehitetty useimpia teknisiä tapauksia varten laskentakaavoja. Nämä laskentakaavat, eli ns. *korrelaatiokaavat*, on yleensä saatu osittain teoreettisesti ja osittain kokeellisesti. Erityisesti dimensioanalyysiä on käytetty tässä asiassa hyväksi.

### Lämmönsiirtokerroin ja dimensioanalyysi

Suureiden, joihin dimensioanalyysiä voidaan soveltaa, on oltava sellaisia että kahden suuren suhde on riippumaton käytetyistä dimensiojärjestelmistä. Esimerkiksi jos jonkin nesteen viskositeetti on kaksi kertaa niin suuri kuin jonkin toisen nesteen, niin tulee tämä verranto olla sama sekä suomalaisilla viskositeetin mittayksiköillä että englantilaisilla viskositeetin mittayksiköillä.

Tarkastellaan seuraavassa dimensianalyysin käyttöä konvektioiteoriassa. Olkoon tarkasteltavana tapaus, jossa fluidi virtaa putkessa jonka halkaisija on  $d$  ja tapahtuu lämmönsiirtoa joko fluidista putken pintaan tai päinvastoin, eli ns. pakotettu konvektio putkessa.

Ensimmäiseksi voidaan erittäin hyvällä syyllä olettaa, että  $\alpha$  on paitsi halkaisijan  $d$ , myös fluidin aineominaisuuksien funktio, eli

$$\alpha = g(\lambda, d, \eta, \rho, \nu, c_p), \quad (20)$$

missä  $\lambda$  = lämmönjohtavuus,  $\eta$  = viskositeetti,  $\rho$  = tiheys,  $\nu$  = virtausnopeus ja  $c_p$  = ominaislämpökapasiteetti. Tämä saadaan muotoon  $\alpha = g(\lambda, d, \eta, \rho, \nu, c_p) = 0$ , josta

$$f(\alpha, \lambda, d, \eta, \rho, \nu, c_p) = 0. \quad (21)$$

Buckinghamin pii-teoreema sanoo että jos on olemassa fysikaalista asiaa kuvaava funktio muotoa

$$f(a_1, a_2, \dots, a_n) = 0, \quad (22)$$

missä termit  $a_1, a_2, \dots, a_n$  ovat  $n$  fysikaalista suureta joissa on yhteensä  $m$  kpl perusdimensioita, niin nämä suureet voidaan, mitään informaatiota menettämättä, järjestellä undeksi funktioksi

$$F(\pi_1, \dots, \pi_{n-m}) = 0, \quad (23)$$

missä termit  $\pi_1, \dots, \pi_{n-m}$  ovat dimensiottomia suureita jotka on muodostettu suureiden  $a_1, a_2, \dots, a_n$  potenssien tuloina:

$$\pi_i = a_1^{p_1} a_2^{p_2} \dots a_n^{p_n}, \quad (24)$$

missä eksponentit  $p_i$  ovat rationaalilukuja (voi olla myös  $p_i = 0$  jolloin  $a_i^{p_i} = 1$ ).

Funktiossa (22) on suureiden lukumäärä  $n = 7$  ja siinä olevien suureiden dimensiot ovat:

$$\begin{aligned} [a_1] &= \frac{W}{m^2 K} \quad (\text{nähdään yhtälöstä } q = \alpha(T_{\text{pinta}} - T_{\text{fluid}})) \\ &= \frac{J/s}{m^2 K} = \frac{N m/s}{m^2 K} = \frac{kg m s^{-2} m s^{-1}}{m^2 K} = kg s^{-3} K^{-1} \\ [\lambda] &= \frac{W}{m K} = \frac{J}{m K} = \frac{N m}{m K} = \frac{m}{s^2 m K} = kg m^1 s^{-3} K^{-1} \\ [d] &= m^1 \\ [\eta] &= kg m^{-1} s^{-1} \\ [\rho] &= kg m^{-3} \\ [\nu] &= m^1 s^{-1} \\ [c_p] &= J kg^{-1} K^{-1} = Nm kg^{-1} K^{-1} = kg m s^2 m kg^{-1} K^{-1} = m^2 s^{-2} K^{-1} \end{aligned}$$

Suureissa olevat perusdimensiot ovat: massa (kg), aika (s), matka (m) ja lämpötila (K) eli  $m = 4$ . Nyt on siis  $n - m = 7 - 4 = 3$  ja täten  $F(\pi_1, \pi_2, \pi_3) = 0$  eli on muodostettava 3 pii-ryhmää. Ryhmät voidaan muodostaa useilla eri tavoilla mutta kannattavinta on muodostaa ne niin, että funktio  $F$  kuvaa fysikaalisia ilmiötä mahdollisimman selkeästi. Kokemus on osoittanut, että tässä tapauksessa ryhmät kannattaa muodostaa siten, että  $\alpha$ ,  $\nu$  ja  $c_p$  esiintyvät kukin vain yhdessä ryhmässä ja  $\lambda$ ,  $d$ ,  $\eta$  ja  $\rho$  kaikissa ryhmässä (jollei suureen eksponentiksi tule 0). Esiintyköön  $\alpha$  ryhmässä  $\pi_1$ , jolloin

$$\pi_1 = \lambda^{p_1} d^{p_2} \eta^{p_3} \rho^{p_4} \alpha. \quad (25)$$

Jotta  $\pi_1$  olisi dimensioton, pitää perusdimensioiden supistua pois eli pitää olla

$$(kg^1 m^{-3} s^{-1} K^{-1})^{p_1} (m^1)^{p_2} (kg^1 m^{-1} s^{-1})^{p_3} (kg^1 m^{-3} K^{-1})^{p_4} (kg^1 s^{-3} K^{-1})^{p_5} = 1,$$

jolloin eksponentteille saadaan yhtälöryhmä, josta ne voidaan ratkaista:

$$\begin{aligned} kg: & p_1 + p_3 + p_4 + 1 = 0 & \left\{ \begin{array}{l} p_1 = -1 \\ p_2 = 1 \\ p_3 = 0 \\ p_4 = 0 \end{array} \right. \\ m: & p_1 + p_2 - p_3 - 3p_4 = 0 \\ s: & -3p_1 - p_3 - 3 = 0 \\ K: & -p_1 - 1 = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \pi_1 = \lambda^{-1} d^1 \alpha = \frac{\alpha d}{\lambda}$$

Luku  $\pi_2$  muodostetaan vastaavalla menetetyllä siten, että siinä on  $\nu$  ja luku  $\pi_3$  siten että siinä on  $c_p$ .

Putkivirtaukselle saavat dimensiottomat luvut ovat seuraavanlaiset ja ne on nimetty seuraavasti:

$$\pi_1 = Nu \equiv \frac{\alpha d}{\lambda} = \text{Nusseltin luku} \quad (26)$$

$$\pi_2 = Re \equiv \frac{\nu d \rho}{\eta} = \text{Reynoldsin luku ("dimensioton virtausnopeus")} \quad (27)$$

$$\pi_3 = Pr \equiv \frac{\eta c_p}{\lambda} = \text{Prandtin luku} \quad (28)$$

Kun kyseessä on putkivirtaus, on Reynoldsin luvussa ja Nusseltin luvussa ns. *karaktelistisena mitana* putken halkaisija. On syytä huomata että Prandtin luku on pelkkä aineominaisuus, kun taas  $Nu$  ja  $Re$  riippuvat myös geometrisista ominaisuuksista ( $d$  ja  $\nu$ ).

$F(\pi_1, \pi_2, \pi_3) = 0$  saa täten muodon

$$Nu = g(Re, Pr). \quad (29)$$

Aluperin 7 muutujan ongelma (20) on täten saatu muutettua kolmen muutujan ongelmaksi (29). Kaavalle (29) voidaan määrittää approksimatiivinen analyyttinen muoto eli korrelaatiokaava tekemällä mittausarvoja. Tarvittavien mittaussarjojen määrä on kuitenkin suunnattomasti pienempi kuin se olisi ollut seisemän muutujan ongelmassa. Jäljempänä esitellään joitakin korrelaatiokaavoja.

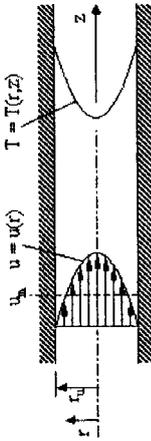
### Laminaarinen ja turbulентinen virtaus

Yksi konvektion liittyvä oleellinen asia on, että onko virtaus *laminaarinen* vai *turbulenttinen*. Laminaarisessa virtauksessa virtaviivat ovat suoria ja se esiintyy pienillä nopeuksilla (pienillä Reynoldsin luvun arvoilla). Laminaarista virtausta voisi kuvailla "sistiksi". Turbulenttinessa virtauksessa puolestaan virtaviivat ovat pyönteisiä ja muodoltaan epämääräisiä mutta niillä on kuitenkin tietty keskimääräinen nopeussuunta. Turbulenttinen virtaus esiintyy suurilla nopeuksilla (suurilla Reynoldsin luvun arvoilla). Laminaarisessa virtauksessa konvektio noudattaa aina jotain aivan muuta korrelaatiota kuin turbulenttinessa.

Tiettyä virtausgeometriassa muuttuu virtaus laminaarisesta turbulenttiseksi aina tietyllä Reynoldsin luvun arvolla. Putkivirtauksessa, kuvat 8 ja 9, on kokeellisesti todettu, että jos  $Re \leq 2300$ , on virtaus laminaarinen ja kun  $Re > 4000$ , on virtaus turbulентinen. Kun  $2300 < Re \leq 4000$ , on kyseessä ns. siirtymävyöhyke, jossa virtaus voi olla joko laminaarinen tai

turbulentinen. Siirtymävyyhykkeen ylärajalle ei voida esittää tarkkaa yleisiä arvoa. Siirtymävyyhykkeellä oleva virtaus käyttäytyy usein siten, että se on heikittäin laminaarinen ja heikittäin turbulentinen.

### Putkivirtaus



Kuva 8. Nopeus- ja lämpötilajakaumat laminaarisessa putkivirtauksessa. Lämpötilajakauma koskee tapausta, jossa lämpöä siirtyy putken seinämästä virtaavaan aineeseen.

Laminaariselle putkivirtaukselle, kuva 8, voidaan johtaa analyttisesti etä

$$\begin{cases} Nu = 48/11, \text{ kun lämpövirta pinnan läpi on vakio} \\ Nu = 3,66, \text{ kun pinnan lämpötila on vakio} \end{cases} \quad (30)$$

Laminaarisen putkivirtauksen nopeusprofiilille voidaan johtaa kaava

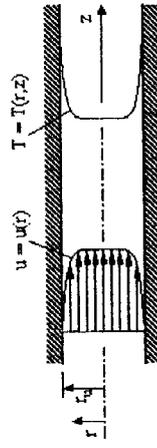
$$u = 2u_m \left[ 1 - \left( \frac{r}{r_0} \right)^2 \right], \quad (31)$$

ja lämpötilaprofiili  $T = T(r, z)$  on neljännen asteen polynomi.

Turbulenttisen putkivirtauksen nopeusprofiili on tulppamainen, kuva 9, ja sille on määritetty tekemällä mitausrjoja yhtälölle (29), Hausenin korrelaatio:

$$Nu = 0,037 \left[ Re^{0,75} - 180 \right] Pr^{0,42}. \quad (32)$$

Turbulenttiselle putkivirtaukselle on kehitetty myös muita vaihtoehtoisia korrelaatiokaavoja.



Kuva 9. Turbulenttinen putkivirtaus. Lämpötilajakauma koskee tapausta, jossa lämpöä siirtyy putken seinämästä virtaavaan aineeseen.

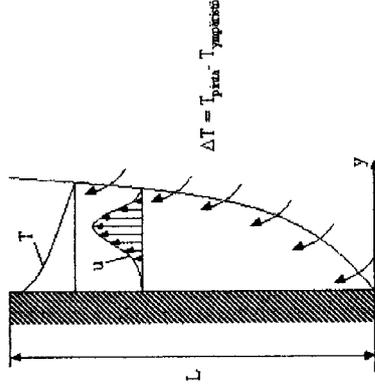
Mittakoon lyhyesti tässä yhteydessä, että painehäviö  $\Delta p$  putken virtaussuunnassa lasketaan kaavalla

$$\Delta p = \frac{\lambda}{d} \rho v^2 L. \quad (33)$$

Vastuskertoimelle  $\lambda$ , pätee laminaarisessa virtauksessa  $\lambda = 64/Re$  ja turbulenttisessä vastuskertoimen voi määrittää Moodyn diagrammistä, joka löytyy taulukkokirjasta (Raportti 136, taulukko 34). Taulukkokirjassa on myös esimerkki painehäviön laskemisesta kanavassa.

### Vapaa konvektio

Kun aluksi paikalliaan olevaa ilmaa lämmitetään tai jäädytetään, syntyy ilmaan tiheyseroja, jotka puolestaan aiheuttavat noston, joka edelleen aiheuttaa virtauksen, jossa lämmin ilma pyrkii kevyempänä kylmemmän ilman yläpuolelle. Tällöin puhutaan vapaasta eli luonnollisesta konvektiosta. Esimerkiksi kuvan 10 pystysuorassa seinässä on seinän pinta lämpimämpi kuin ympäröivä ilma jolloin lämpö siirtyy pinnasta ilmaan mutta samalla siis tiheyserot aikansaavat ilman virtauksen ylöspäin.



Kuva 10. Vapaa konvektio pystysuorassa seinässä.

Vapaassa konvektiossa pätee

$$Nu = f(Gr, Pr), \quad (34)$$

missä

$$Gr = \frac{\beta g \rho^2 L^3 (T_s - T_\infty)}{\eta^2} = \text{Grashofin luku}, \quad (35)$$

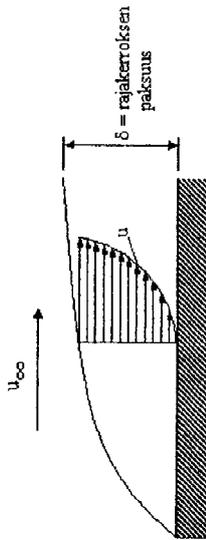
missä  $\beta$  = lämpölaajenemiskerroin,  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ ,  $L$  = seinämän korkeus,  $T_s$  = seinämän lämpötila ja  $T_\infty$  = ympäröivän ilman lämpötila. Kun kyseessä on ilma, pätee likimain  $\beta = 1/T$ , missä  $T = (T_s + T_\infty)/2$ . Yhtälössä (33) on Nusseltin luvussa karakteristisena mittana seinämän korkeus  $L$ .

Vapaa konvektio kuvan 10 pystysuorasta seinästä on laminaarista, kun  $Gr \cdot Pr = 10^4 \dots 10^9$  ja turbulentista kun  $Gr \cdot Pr > 10^9$ , ja siinä pätevät korrelaatiokaavat

$$\begin{cases} Nu = 0,59(Gr \cdot Pr)^{1/4}, \text{ kun } Gr \cdot Pr = 10^4 \dots 10^9 \\ Nu = 0,10(Gr \cdot Pr)^{1/3}, \text{ kun } Gr \cdot Pr > 10^9 \end{cases} \quad (36)$$

**Pakotettu konvektio**

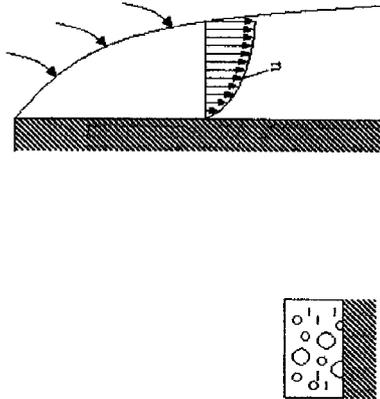
Pakotetussa konvektiossa, kuva 11, virtauksen aikaansaa jokin ulkoinen tekijä kuten puhallin, ja sille korrelaatiokaavat ovat muotoa  $Nu = Nu(Re, Pr)$ . Edellä käsitelty putkivirtaus on yksi pakotetun konvektion muoto.



Kuva 11. Pakotettu konvektio.

**Kiehumisen ja lauhtumisen**

Tärkeitä konvektiotapauksia ovat myös faasimuutokset, kuten kiehumisen ja lauhtuminen. Kiehumisessakin käytetään kaavaa (19), jossa  $T_{fluid}$  on nyt nesteen kiehumislämpötila ja lauhtumisessa vastaavasti  $q = \alpha(T_{fluid} - T_{pinta})$ , missä  $T_{fluid}$  on lauhtumislämpötila. Kiehumisen ja lauhtumisen korrelaatiokaavat, joista  $\alpha$  saadaan ratkaistua, ovat monimutkaisia, mutta niistä ei tässä yhteydessä tämän enempää (kuva 12).



Kuva 12. Veden kiehumisen ja höyryn lauhtuminen.

**Konvektiivisen lämmönsiirtokertoimen laskemisesta**

Konvektiivisen lämmönsiirtokertoimen lukuarvo on aina karkea approksimaatio koska laskutapaan jolla se on saatu, sisältyy aina hyvin paljon karkeitä idealisointeja. Konvektiivisen lämmönsiirtotapauksen ratkaiseminen käytännön insinöörityössä tapahtuu yleensä siten että alan kirjallisuudesta haetaan korrelaatiokaava kyseiselle tapaukselle. Toisinaan yhdelle ja samalle tapaukselle löytyy useita erilaisia korrelaatiokaavoja, jotka antavat jonkin verran toisistaan poikkeavia, mutta kuitenkin samaa suuruusluokkaa olevia tuloksia. Kun korrelaatiokaava löytyy

kirjallisuudesta, on tärkeää katsoa, mikä on kyseisessä korrelaatiiossa valittu dimensioitomien lukujen karakteristiseksi mitaksi.

**Esimerkki 1**

Lasketaan Hausenin korrelaatiokaavan (32) avulla sisäpuolinen lämmönsiirtokerroin  $\phi 15/\phi 13$  - kokoisessa kupariputkessa, kun putkessa virtaa nopeudella  $v = 1.2$  m/s a)  $10^\circ\text{C}$  vesi b)  $10^\circ\text{C}$  vesi-glykoliseos(30%).

a)  $10^\circ\text{C}$  veden aineominaisuudet taulukokirjasta s. 14:  $\rho = 999.7$  kg/m<sup>3</sup>,  $\eta = 1.308 \cdot 10^{-3}$  kg/ms,  $\lambda = 0.5767$  W/mK,  $c_p = 4191$  J/kgK. Kinemaattinen viskositeetti  $\nu = \eta/\rho = 1.308 \cdot 10^{-6}$  m<sup>2</sup>/s.

Prandlin luku:  $Pr = \frac{\eta c_p}{\lambda} = \frac{1.308 \cdot 10^{-3} \text{ kg/ms} \cdot 4191 \text{ J/kgK}}{0.5767 \text{ W/mK}} = 9.506$ .

Reynoldsin luku:  $Re = \frac{v d}{\nu} = \frac{1.2 \text{ m/s} \cdot 0.013 \text{ m}}{1.308 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}} = 11927$ . Koska nyt  $Re > 4000$ , on virtaus varmasti turbulenttinen ja Hausenin korrelaatiokaavaa voidaan käyttää:

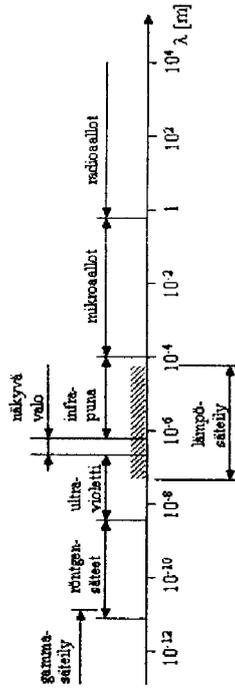
$Nu = 0.037(Re^{0.75} - 180)Pr^{0.42} = 0.037(11927^{0.75} - 180)9.506^{0.42} = 91.58$ .

$\alpha = \frac{\lambda}{d} Nu = \frac{0.5767 \text{ W/mK}}{0.013 \text{ m}} 91.58 = 4063 \text{ W/m}^2\text{K}$ . Huomaa että  $4063 \text{ W/m}^2\text{K}$  on pelkkä likiarvo!

b) 30% vesi-glykoliseoksen (glykolia 30%) aineominaisuudet:  $\nu = 4.0 \cdot 10^{-6}$  m<sup>2</sup>/s,  $\lambda = 0.465$  W/mK,  $c_p = 3650$  J/kgK,  $\rho = 1040$  kg/m<sup>3</sup>. Vastaavasti kuin edellä saadaan  $Pr = 32.8$  ja  $Re = 4390$ . Hausenin korrelaatiokaavasta saadaan  $Nu = 57.6$  josta  $\alpha = 2060 \text{ W/m}^2\text{K}$ . Lämmönsiirtokerroin on pienentynyt puoleen edellisestä!

**SÄTEILYLÄMMÖNSIIRTO**

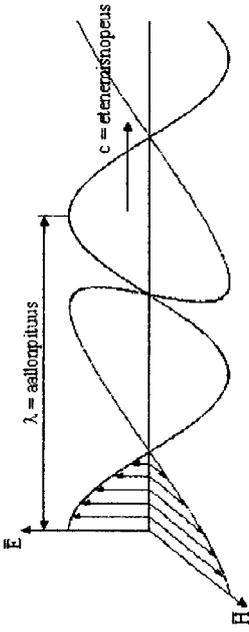
Lämpösäteilyksi kutsutaan sellaista sähkömagneettista säteilyä, jonka on aiheuttanut kappaleen lämpötila. Jokainen pinta lähettää lämpötilansa mukaista lämpösäteilyä - sitä lyhytaaltoisempaa mitä kuumempi on pinnan lämpötila. Kuva 13 esittää lämpösäteilyn paikkaa sähkömagneettisen säteilyn spektrissä.



Kuva 13. Sähkömagneettisen säteilyn spektri ja lämpösäteilyn paikka siinä. Sähkömagneettista säteilyä on jaettu eri alalajeihin paitsi aallonpituuden, myös syntyänsä ja eräiden muiden seikkojen perusteella. Eri lähteistä löytyy aallonpituusalueille hieman eritasaisia arvoja.

Kun lämpö siirtyy konduktiolla tai konvektiolla, pitää olla aina väliaine, mutta lämpösäteily sen sijaan voi siirtyä myös tyhjiössä ja tyhjiössä se itse asiassa siirtyykin parhaiten.

Kuva 14 esittää sähkömagneettista säteilyä kuvattuna sähkökentän  $E$  ja magneettikentän  $H$  aaltoliikkeenä:



Kuva 14. Sähkömagneettinen säteily kuvattuna sähkökentän  $E$  [V/m] ja magneettikentän  $H$  [A/m] aaltoliikkeenä. Aaltoliikkeen etenemisnopeudelle  $c$  [m/s] pätee  $c = f \cdot \lambda$ , missä  $f$  = taajuus [1/s] ja  $\lambda$  = aallonpituus [m].

Sähkökenttävektorin ja magneettikenttävektorin ristituloa kutsutaan nimellä Poyntingin vektori,  $S = E \times H$ , jonka itseisarvo kuvaa säteilyn energiovirtaa [ $W/m^2$ ].

$$u \cdot c = |E \times H| = \text{säteilyn energiovirta} \quad [W/m^2], \quad (37)$$

missä  $u$  = sisäenergia/tilavuus. Säteilyn teoreettinen tarkastelu voidaan käyttää ns. Gibbsin yhtälöä:

$$dS = \frac{dU + pdV}{T}, \quad (38)$$

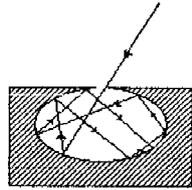
missä  $S$  = entropia ja  $U = uV$  = sisäenergia. Gibbsin yhtälö seuraa termodynamiikan I ja II pääsäännöistä.

Säteilyn paineelle, joka on konkreettinen mitattavissa oleva suure, pätee

$$p = u/3. \quad (39)$$

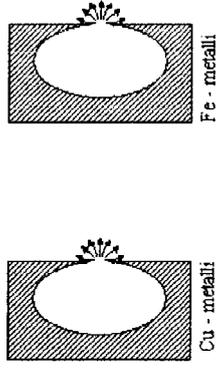
### Mustan kappaleen säteily

Mustalla kappaleella tarkoitetaan ideaalista kappaleita, joka *absorpoii* (ottaa sisäänsä) kaiken siihen osuvan säteilyn. Käytännössä tällainen mustan kappaleen säteilyä voidaan järjestää tekemällä ontelo, jossa on pieni reikä. Lähes kaikki relästä sisään menneet säteily jää poukkoilemaan ontelon sisään, kuva 15.



Kuva 15. Ontelo toimii ns. mustana kappaleena.

Toisaalta ontelosta *emittoitava* (ulostuleva) säteily on samanaista ontelon materiaalista riippumatta, kun lämpötila on sama (ns. mustan säteilyn periaate), kuva 16.



Kuva 16. Mustan kappaleen periaate.

Mustan kappaleen säteilyssä jokaista lämpötilaa  $T$  vastaa  $\lambda_{\text{max}}$  siten että

$$\lambda_{\text{max}} T = \text{vakio} = 2897,8 \text{ } \mu\text{m}\cdot\text{K}, \quad (40)$$

ja tämä tunnetaan nimellä Wienin siirtymälaki.

Lähtien kaavoista (38) ja (39) on johdettu että mustan kappaleen säteilyn energiovirta on verrannollinen lämpötilan neljänteen potenssiin seuraavasti (Stefanin-Boltzmannin laki)

$$q = \sigma T^4, \quad (41)$$

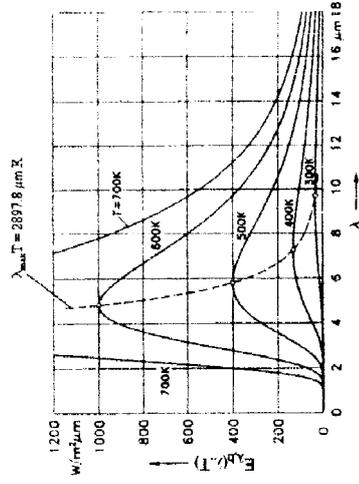
missä  $\sigma$  = Boltzmannin vakio =  $5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2\text{K}^4$ .

Hieman myöhemmin Planck on johtanut mustan kappaleen säteilylle toisen kuvaamistavan:

$$\text{Energiovirta/aallonpituus} = E_{\lambda,b}(\lambda, T) = \frac{c_1}{\lambda^5 [\exp(c_2/\lambda T) - 1]}, \quad (42)$$

missä  $c_1 = 3,74 \cdot 10^{-16} \text{ Wm}^2$  ja  $c_2 = 14387 \text{ } \mu\text{m}\cdot\text{K}$ .  $E_{\lambda,b}(\lambda, T)$ :n yksikkö on  $\frac{W}{m^2 \mu\text{m}}$  eli energiovirta on

jokaista  $\mu\text{m}$  mittaista aallonpituuskaistaa kohti. Kaavalla (42) saatava jakauma on esitetty eri lämpötiloilla kuvassa 17:



Kuva 17. Pinnasta puoliavaruuteen lähtevän mustan kappaleen spektrin emissiosäteily  $\mu\text{m}$  aallonpituuskaistaa kohti.

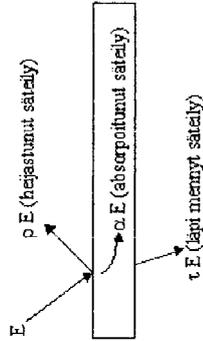
### Harmaa pinta

Käytännössä pinnat ovat ns. *harmaita pintoja* jotka emittoivat säteilyä vähemmän kuin vastaavassa lämpötilassa oleva musta kappale. Tällöinkin käytetään vertailukohtana mustan kappaleen säteilyä käyttämällä emissiokerrointa  $\epsilon$  jolloin kaava (41) modifioituu muotoon

$$q = \epsilon \sigma T^4 \quad (43)$$

Emissiviteetti on kyseiselle pinnalle ominainen dimensioton kerroin jonka arvo on aina välillä 0...1.

Kun sähkömagneettinen säteily  $E$  [W] kohtaa kappaleen niin osa säteilystä absorboituu, osa heijastuu ja osa läpäisee kappaleen, kuva 18:



Kuva 18. Säteilymerkintöjä.

Kuvan 18 kappaleen energiatase on

$$E = \rho E + \alpha E + \tau E, \quad (44)$$

josta seuraa että

$$\rho + \alpha + \tau = 1, \quad (45)$$

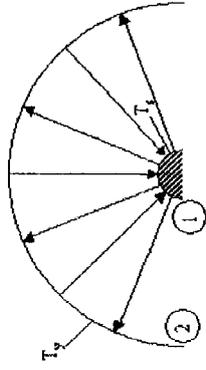
missä  $\rho$  = heijastuskerroin,  $\alpha$  = absorptiokerroin ja  $\tau$  = läpäisykerroin. Nämä ovat kaikki dimensiottomia ja niiden arvo on aina välillä 0...1.

### Säteilylämmönsiirron laskemisesta

Säteilylämmönsiirron laskenta on melko monimutkaista mm. siksi että kun pinta a säteilee pintaa b, tulee pinnasta b vastasäteilyä takaisin pintaan a. Puutemme tässä vain kuvan 19 esittämään tapaukseen jossa pinta 1 säteilee ympäristöön 2. Kun ympäristö on hyvin paljon suurempi, voidaan nettosäteily pinnasta ympäristöön esittää kaavalla (kurssikirjan kaava (57)):

$$q_s = \epsilon \sigma (T_s^4 - T_y^4), \quad (46)$$

missä  $\epsilon$  = pinnan emissiokerroin,  $T_s$  = pinnan lämpötila ja  $T_y$  = ympäristön lämpötila.



Kuva 19. Pinnan 1 ja ympäristön 2 välinen nettosäteily.

Jos ympäristö on puolipallon muotoinen (pinta 2), on kuvan 19 tapauksen eksakti kaava muotoa

$$q_{1-2} = \frac{\frac{\epsilon_1 \sigma T_s^4 - \epsilon_2 \sigma T_y^4}{\alpha_1} + \frac{\epsilon_2 \sigma T_y^4}{\alpha_2}}{\frac{1}{A_1} + \frac{F_{12} A_1}{\rho_1} + \frac{1}{A_2} + \frac{1}{\rho_2}}, \quad (47)$$

missä  $F_{12}$  on pintojen 1 ja 2 välinen näkyvyyskerroin.

### Esimerkki 2

Kun vaakaoruorasta kuumasta pinnasta siirtyy lämpöä vaapalla konvektiolla sen yläpuolella olevaan ilmaan, pätee konvektiolle korrelaatio

$$Nu = 0.27(Gr \cdot Pr)^{1/4}, \text{ kun } Gr \cdot Pr = 10^5 \dots 10^{10}, \quad (48)$$

missä Nusseltin luvun ja Grashofin luvun karakteristisena mittana  $L$  on

$$L = A / P, \quad (49)$$

missä  $A$  = pinnan pinta-ala ja  $P$  = pinnan piiri.

Lasketaan tämän avulla kokonaislämmönsiirto (konvektio + säteily) 100°C lämpötilassa olevasta sähköhellan keittolevystä, halkaisija 20 cm, huoneeseen jonka lämpötila on 20°C (kun levy on paljaana).

Konvektio:

$$\text{Karakteristinen mitta: } L = \frac{A}{P} = \frac{\pi d^2 / 4}{\pi d} = \frac{d}{4} = \frac{0.2 \text{ m}}{4} = 0.05 \text{ m}.$$

Ilman aineominaisuudet keskimääräisessä lämpötilassa  $T = \frac{20^\circ\text{C} + 100^\circ\text{C}}{2} = 60^\circ\text{C}$

taulukkokirjan taulukosta 37:  $\rho = 1,045 \text{ kg/m}^3$ ;  $\eta = 19,99 \cdot 10^{-6} \text{ kg/sm}^2$ ;  $\lambda = 28,48 \cdot 10^{-3} \text{ W/mK}$ ;  $Pr = 0,707$ . Lämpölaajenemiskerroin  $= \beta = 1/T = 1/(60 + 273,15) \text{K} = 0,00300 \text{ K}^{-1}$ .

$$Gr = \frac{\beta g \rho^2 L^3 (T_s - T_y)}{\eta^2} = \frac{0,00300 \text{ K}^{-1} \cdot 9,8 \text{ lm/s}^2 \cdot (1,045 \text{ kg/m}^3)^2 \cdot (0,05 \text{ m})^3 \cdot (100 - 20) \text{ K}}{(19,99 \cdot 10^{-6} \text{ kg/sm})^2} = 804261.$$

$Gr \cdot Pr = 804261 \cdot 0,707 = 568613$ . Korrelaatiokaava (48):

$$Nu = 0,27(Gr \cdot Pr)^{1/4} = 0,27 \cdot 568613^{1/4} = 7,41.$$

$$\text{Nusseltin luvun määritelmästä (26): } \alpha = \frac{\lambda}{L} \cdot Nu = \frac{28,48 \cdot 10^{-3} \text{ W/mK}}{0,05 \text{ m}} \cdot 7,41 = 4,22 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}.$$

Konvektiolla siirtyvä lämpöteho on täten  $q_k = \alpha(T_p - T_y) = 4,22 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K} \cdot (100 - 20) \text{K} = 338 \text{ W/m}^2$ .

Säteily:

Ympäristön eli huoneen seinien lämpötila voidaan olettaa samaksi kuin huoneilman lämpötila eli  $T_y = T_s = 20^\circ\text{C}$ . Taulukkokirjan taulukosta 29 valuraudan emissiviteetti  $\epsilon = 0,8$ . Kaava (46):

$$q_s = \epsilon \sigma (T_s^4 - T_y^4) = 0,8 \cdot 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}^4 \cdot (373,15^4 - 293,15^4) \text{ K}^4 = 544 \text{ W/m}^2.$$

Kokonaislämpöteho:

$$\Phi = A(q_k + q_s) = (\pi d^2 / 4)(q_k + q_s) = (\pi \cdot 0,2^2 \text{ m}^2 / 4)(338 \text{ W/m}^2 + 544 \text{ W/m}^2) = 27,7 \text{ W} \approx 30 \text{ W}.$$