Institutionen för matematik
Tekniska högskolan Metsalo

Mat-1.1531 Svenskspråkig grundkurs i matematik 3-I

Tentamen 19.12.2009

Fyll i tydligt *på varje svarpapper* samtliga uppgifter. På *förhörskod och -namn* skriv kursens kod, namn samt *slutförhör* eller *mellanförhör* med ordningsnummer. Examenprogrammen är ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KTA, KON, MAR, MTE, PUU, RRT, TFM, TIK, TLT, TUO, YYT.

Vid denna tentamen får varken räknare eller tabellsamlingar användas. Fråga om ni misstänker att det förekommer något tryckfel! Observera, att olika (del-)uppgifter kan ge olika antal poäng.

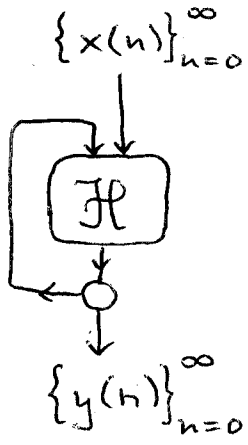
För $z = x + iy \in \mathbf{C}$ $(x, y \in \mathbf{R})$ definieras den komplexa exponentialfunktionen som $e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$ och de komplexa sinus- och cosinus-funktionerna som $\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$ resp. $\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$.

1. a) Bestäm $\ln i$, dvs. alla komplexa tal z sådana att $e^z = i$, på formen $x + iy$. (2p.)
   b) Bestäm det värdet på i^i, som är närmast 1, dvs. för vilket $|i^i - 1|$ minimeras. (2p.)

2. a) Beräkna $\int_\gamma z^2 dz$, där γ är linjesegmentet från $z_0 = i$ till $z_1 = 2$. (2p.)
   b) Beräkna $\int_\gamma |z^2| dz$, där γ är samma linjesegment som i a)-delen. (2p.)
   c) Beräkna $\oint_C \frac{\cos(e^z)}{z-2} dz$, där C är enhetscirkeln genomlupen ett varv i positiv led, dvs. moturs. (2p.)

3. a) Förklara varför man inte kan beräkna integralen $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{1+x^2} dx$ genom att konstatera, att funktionen $f(z) = \frac{\sin(z)}{1+z^2}$ är analytisk på reella axeln och i det övre halvplanet utom i punkten $z = i$, därefter beräkna residyn $Res(f, i)$ i punkten i och sedan med hänvisning till residyteoremet säga att integralens värde borde bli $2\pi i Res(f, i)$. (4p.)
   b) Beräkna mha. residyteoremet $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{5+4\cos(t)}$. (Gott råd: substitutionen $t \to z(t) = e^{it}$ avbildar intervallet $[0, 2\pi]$ på enhetscirkeln.) (4p.)

4. a) Antag att $x(n) = y(n) = 0$ för $n < 0$ och att det för alla $n \in \mathbf{Z}$ gäller att $y(n) = 2x(n) - x(n-1) + \frac{1}{3}y(n-1)$. Bestäm systemets överföringsfunktion, alltså funktionen $H(z)$ för vilken det gäller att $\sum_{n=0}^{\infty} y(n)z^{-n} = H(z) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n}$, dvs. $Y(z) = H(z) \cdot X(z)$. (3p.)
   b) Antag att $x(n) = 2^{-n}$ för $n = 0, 1, 2, \ldots$ för systemet i a)-delen. Beräkna Z-transformen $X(z)$ av $\{x(n)\}_{n=0}^{\infty}$, därefter Z-transformen $Y(z) = H(z) \cdot X(z)$ av $\{y(n)\}_{n=0}^{\infty}$ och slutligen ur detta $y(n)$ för $n = 0, 1, 2, \ldots$. (3p.)



5. Lös begynnelsevärdesproblemet
   $y''(t) + 4y'(t) + 3y(t) = 4 + 3t, y(0) = 3, y'(0) = -6$
   med hjälp av Laplace-transformering. Använd vid behov formlerna för Laplace-transformen på baksidan. (6p.)

God Jul och Gott Nytt År!

Laplace-transformationer

$$\mathcal{L}(f) = F(s) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\mathcal{L}(1) = \frac{1}{s}$$

$$\mathcal{L}(t^k) = \frac{k!}{s^{k+1}}$$

$$\mathcal{L}(\mathrm{e}^{at}) = \frac{1}{s-a}$$

$$\mathcal{L}(\cos(\omega t)) = \frac{s}{s^2+\omega^2}$$

$$\mathcal{L}(\sin(\omega t)) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

$$\mathcal{L}(f^{(n)}(t) = s^n F(s) - f^{(n-1)}(0) - s f^{(n-2)}(0) - \ldots - s^{n-1} f(0)$$

$$\mathcal{L}(-t f(t)) = F'(s)$$

$$\mathcal{L}\left(\mathrm{e}^{at} f(t)\right) = F(s-a)$$

$$\mathcal{L}(u(t-a) f(t-a)) = \mathrm{e}^{-as} F(s), \quad a \geq 0$$