Matematiikan laitos
Teknillinen korkeakoulu

Malinen – Sirviö

Mat-1.1210 Matematiikan peruskurssi S1

3. välikoe 15.12.2005

Täytä selvästi *jokaiseen vastauspaperiin* kaikki otsaketiedot. Merkitse kurssikoodi-kohtaan opintojakson numero, nimi ja onko kyseessä tentti vai välikoe. Koulutusohjelmakoodit ovat ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KJO, KTA, KON, MAK, MAR, PUU, RAK, TFY, TIK, TLT, TUO, YHD.

Kokeessa saa käyttää funktiolaskinta, ei muita apuvälineitä. Koeaika on 3h.

1. Ratkaise differentiaaliyhtälöryhmä

$$\begin{aligned} y_1' &= 3y_1 + 2y_2 \\ y_2' &= 2y_1 \end{aligned}$$

kirjoittamalla yhtälöryhmä muotoon $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ ja diagonalisoimalla matriisi A.

Ratkaisu: Matriisiksi saadaan $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, jonka ominaisarvot $\lambda_1 = 4$ ja $\lambda_2 = -1$. Vastaavat ominaisvektorit ovat esimerkiksi $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ sekä $\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Differentiaaliyhtälön ratkaisu on siis

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{4t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{bmatrix},$$

jossa $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = -\frac{1}{5} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. Loppu onkin matriisivektoritulojen laskemista, jota tähän ei jaksa kirjoittaa.

---

2. a) Rautalanka, jonka pituus on 4 m, leikataan kahteen osaan. Toisesta osasta rautalankaa väännetään ympyrän kehä ja toisesta osasta rautalankaa väännetään neliön kehä. Miten rautalanka olisi leikattava ja väännettävä, jotta rautalangasta väännettyjen ympyrän ja neliön yhteenlaskettu pinta-ala olisi mahdollisimman suuri?

b) Kirjoita Taylorin sarja funktiolle $f(x) = \ln(1-x)$ kehityskeskipisteenä $x = 0$. Laske tämän sarjakehitelmän avulla

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\ln(1-x)}.$$

Tarkista tuloksesi l'Hospitalin säännöllä.

Ratkaisu: a) Maksimoidaan funktiota

$$f(x) = \pi \left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 + \left(\frac{4-x}{4}\right)^2, \quad x \in [0,4].$$

Derivoimalla saadaan

$$f'(x) = 2\pi \left(\frac{x}{2\pi}\right)\frac{1}{2\pi} + 2\left(\frac{4-x}{4}\right)\frac{-1}{4} = \frac{x}{2\pi} - \frac{4-x}{8} = \left(\frac{1}{2\pi} + \frac{1}{8}\right)x - \frac{1}{2}.$$

Toinen derivaatta on positiivinen, funktio on siis konveksi ja maksimi saavutetaan päätepisteessä $x = 0$ tai $x = 4$. Laskemalla ja vertaamalla todetaan, että maksimikohta on pisteessä $x = 4$. Rautalankaa ei siis leikata lainkaan, vaan rautalangasta väännetään ympyrän kehä.

b) Jos merkitään $f(x) = \ln(1-x)$, niin $f'(x) = -\frac{1}{1-x}$ ja edelleen $f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^k(k-1)!}{(1-x)^k}$ kaikilla $k \geq 2$. Siis $f(0) = 0$, $f'(0) = -1$, ja $f^{(k)}(0) = (-1)^k(k-1)!$ kaikilla $k \geq 2$. Taylorin sarja on siis

$$f(x) = -x + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k(k-1)!}{k!} x^k = -x + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} x^k.$$

Koska $\ln(1-x) = -x + O(x^2)$ niin

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\ln(1-x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{-x+O(x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{-1+O(x)} = \frac{1}{-1} = -1.$$

Sama tulos olisi tullut "sairaalasäännöllä" paljon helpommin.

---

3. a) Ratkaise likimääräisesti yhtälö $x^2\cos(x) + 2x + 1 = 0$ Newtonin menetelmällä siten, että virhe on itseisarvoltaan korkeintaan 10^{-6}. Alkuarvona voit käyttää $x_0 = 0$.

b) Laske osittaisintegroimalla

$$\int_2^4 x^3 \ln x \, dx\,.$$

Ratkaisu: a) Merkitään $f(x) = x^2\cos(x) + 2x + 1$, jolloin $f'(x) = 2x\cos(x) - x^2\sin(x) + 2$. Newtonin menetelmän mukaan on silloin laskettava

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{{x_n}^2\cos(x_n) + 2x_n + 1}{2x_n\cos(x_n) - {x_n}^2\sin(x_n) + 2}.$$

Jos valitaan $x_0 = 0$, niin saadaan:

$$\begin{aligned} x_0 &= 0.00000000 \\ x_1 &= -0.50000000 \\ x_2 &= -0.67660812 \\ x_3 &= -0.67963664 \\ x_4 &= -0.67963478 \end{aligned}$$

Koska $f(x_4) = 2.7 \cdot 10^{-10} > 0$ ja $f(x_4 - 10^{-6}) = -1.2 \cdot 10^{-6} < 0$ niin nähdään merkinvaihtolauseen nojalla, että $x_4 = -0.67963478$ kelpaa haetuksi likiarvoksi.

b) Osittaisintegroidaan valitsemalla $U = \ln x$ ja $dV = x^3 dx$. Tällöin $dU = \frac{1}{x}$ ja $V = \frac{1}{4}x^4$. Saadaan

$$\int x^3 \ln x \, dx = \frac{1}{4}x^4 \ln x - \int \frac{1}{4}x^4 \cdot \frac{1}{x}\, dx = \frac{1}{4}x^4 \ln x - \frac{1}{16}x^4.$$

Sijoittamalla integroimisrajat saadaan jotain sellaista (ellen pahasti erehdy) kuin $124\ln 2 - 15$.

---

4. Laske määrämätön integraali

$$\int \frac{x^5 - x^4 - 4x^3 - x^2 - 6x + 7}{x^3 - x^2 - 4x - 6} dx\,.$$

(Huom: Nimittäjä $Q(x)$ voidaan kirjoittaa muotoon $Q(x) = (x-3)(x^2+2x+2)$.)

Ratkaisu:

Olkoot $P(x) := x^5 - x^4 - 4x^3 - x^2 - 6x + 7$ ja $Q(x) := x^3 - x^2 - 4x - 6$. Hajotelmassa $Q(x) = (x-3)(x^2+2x+2)$ lausekkeen $x^2+2x+2 = (x+1)^2+1$ nollakohdat ovat imaginaarisia, koska se on aidosti positiivinen kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Jakolaskulla saadaan

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = x^2 + \frac{5x^2-6x+7}{Q(x)}.$$

Hajotetaan jälkimmäinen termi (jakojäännös) kahteen osaan osamurtokehitelmällä seuraavasti

$$\frac{5x^2-6x+7}{Q(x)} = \frac{A}{x-3} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+2} = \frac{(A+B)x^2+(2A-3B+C)x+2A-3C}{Q(x)},$$

josta saadaan ehdot

$$\begin{aligned} A+B &= 5 \\ 2A-3B+C &= -6 \\ 2A-3C &= 7, \end{aligned}$$

eli $A=2, B=3, C=-1$. Siis

$$\frac{5x^2-6x+7}{Q(x)} = \frac{2}{x-3} + \frac{3x-1}{x^2+2x+2} = \frac{2}{x-3} + \frac{\frac{3}{2}(2x+2)-4}{x^2+2x+2}.$$

Huomaa että oikealla puolella esiintyvä $2x+2$ on nimittäjän x^2+2x+2 derivaatta! Nyt voidaan laskea ko. integraali

$$\begin{aligned} \int \tfrac{P(x)}{Q(x)}\,dx &= \int (x^2 + \tfrac{2}{x-3} + \tfrac{3}{2}\cdot\tfrac{2x+2}{x^2+2x+2} - \tfrac{4}{(x+1)^2+1})\,dx \\ &= \tfrac{x^3}{3} + 2\ln|x-3| + \tfrac{3}{2}\ln(x^2+2x+2) - 4\arctan(x+1) + C. \end{aligned}$$