Rak-54.2200 Rakenteiden mekaniikka II, RM II 4op
Tentti 12. 5. 2008

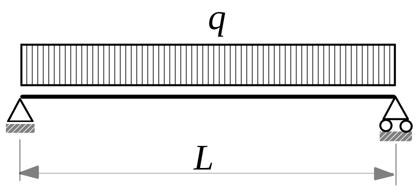
Kirjoita jokaiseen koepaperiin selvästi
- koko nimesi puhuttelunimi alleviivattuna
- osasto, vuosikurssi tentin päivämäärä sekä tentittävä opintojakso koodeineen
- opiskelijanumerosi (mukaanlukien tarkastuskirjain)
- monettako kertaa olet ko. opintojaksoa suorittamassa
- minä vuonna olet suorittanut pakolliset harjoitustehtävät

1. Suorakaiteen muotoisen taivutetun laatan kinematiikka voidaan määrittää siirtymävektorilla

$$\vec{u} = -z\frac{\mathrm{d}w_1}{\mathrm{d}x}\vec{i} - z\frac{\mathrm{d}w_2}{\mathrm{d}y}\vec{j} + (w_1 + w_2)\vec{k}$$

jossa $w_1 = w_1(x)$ ja $w_2 = w_2(y)$. Johda laatan tasapainoyhtälöt, kun materiaali oletetaan lineaarisesti kimmoiseksi ja tasojännitystila laatassa vallitsevaksi. Kimmokerroin on E, Poissonin vakio ν ja laatan paksuus h. Laattaa kuormittaa tasan jakaantunut vakio kuormitus q_o.

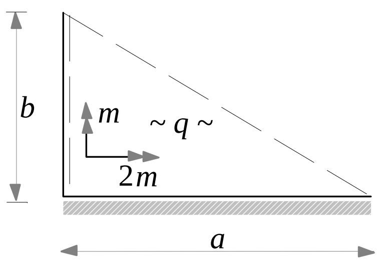
2. Tarkastellaan oheista päistään vapaasti tuettua sauvaa, jonka pituus on L, taivutusjäykkyys EI ja jonka kuormitus on q (vakio). Taivutetun sauvan taipuma $v(x)$ määritetään tavallisesta differentiaaliyhtälöstä



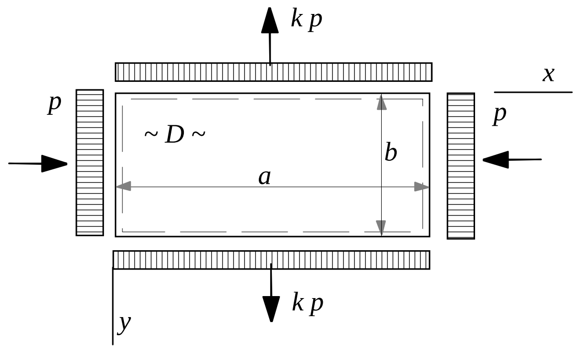
$$\frac{\mathrm{d}^4 v(x)}{\mathrm{d}x^4} = \frac{q}{EI}$$

Ratkaise tehtävä Fourier'n sarjoja käyttäen.

3. Oheinen kolmion muotoinen ortotrooppinen laatta on tuettu kiertymättömästi yhtä reunaa pitkin, vapaasti toista ja yksi sivu on täysin vapaa. Määritä myötöviivateoriaa käyttäen laatan tasan jakaantuneen kuorman raja-arvo q_p.



4. Oheinen suorakaiteen muotoinen levy $(a \times b)$, joka on kaikilta reunoiltaan vapaasti tuettu, on puristettu toisessa suunnassa tasan jakaantuneella reunakuormalla p ja vedetty toisessa suunnassa vastaavasti kuormalla $k\,p$. Määritä, millä kuormaparametrin p arvolla levy lommahtaa. Miten se on riippuvainen poikittaisesta vetävästä kuormasta eli kertoimesta k? Levyn taivutusjäykkyys on D ja paksuus h.



Rak-54.2200 RAKENTEIDEN MEKANIIKKA II
Tentti 12.05.2008

RATKAISUT

1. Annettu kinematiikka $\vec{u} = -z\dfrac{\mathrm{d}w_1}{\mathrm{d}x}\vec{i} - z\dfrac{\mathrm{d}w_2}{\mathrm{d}y}\vec{j} + (w_1 + w_2)\vec{k}$

muodonmuutokset $\varepsilon_x = -z\dfrac{\mathrm{d}^2 w_1}{\mathrm{d}x^2}$ ja $\varepsilon_y = -z\dfrac{\mathrm{d}^2 w_2}{\mathrm{d}y^2}$ $(\varepsilon_z = \gamma_{xy} = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0)$

sisäinen virtuaalinen työ

$$\delta W_s = -\int_V \left(\sigma_x \delta\varepsilon_x + \sigma_y \delta\varepsilon_y\right)\mathrm{d}V = \int_A \int_{-h/2}^{h/2} z\left(\sigma_x \frac{\mathrm{d}^2\delta w_1}{\mathrm{d}x^2} + \sigma_y \frac{\mathrm{d}^2\delta w_2}{\mathrm{d}y^2}\right)\mathrm{dzd}A$$

momenttiresultantit $M_x = \displaystyle\int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z\mathrm{dz}$ ja $M_y = \displaystyle\int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z\mathrm{dz}$

saadaan

$$\delta W_s = \int_A \left(M_x \frac{\mathrm{d}^2\delta w_1}{\mathrm{d}x^2} + M_y \frac{\mathrm{d}^2\delta w_2}{\mathrm{d}y^2}\right)\mathrm{d}A = \int_A \left(M_x \frac{\mathrm{d}^2(\delta w_1 + \delta w_2)}{\mathrm{d}x^2} + M_y \frac{\mathrm{d}^2(\delta w_1 + \delta w_2)}{\mathrm{d}y^2}\right)\mathrm{d}A$$

osittaisintegrointi

$$\delta W_s = \int_A \left((\frac{\mathrm{d}^2 M_x}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\mathrm{d}^2 M_y}{\mathrm{d}y^2})(\delta w_1 + \delta w_2) \right)\mathrm{d}A$$
$$+[\int_y (M_x \frac{\mathrm{d}(\delta w_1 + \delta w_2)}{\mathrm{d}x} - \underbrace{\frac{\mathrm{d}M_x}{\mathrm{d}x}}_{Q_x}(\delta w_1 + \delta w_2))\mathrm{d}y$$
$$+\int_x (M_y \frac{\mathrm{d}(\delta w_1 + \delta w_2)}{\mathrm{d}y} - \underbrace{\frac{\mathrm{d}M_y}{\mathrm{d}y}}_{Q_y}(\delta w_1 + \delta w_2))\mathrm{d}x]$$

ulkoinen virtuaalinen työ $\delta W_u = \displaystyle\int_A q_\mathrm{o}(\delta w_1 + \delta w_2)\mathrm{d}A$.

Virtuaalisen työn periaate $\delta W_s + \delta W_u = 0$

$$\delta W_s + \delta W_u = \int_A \left((\frac{\mathrm{d}^2 M_x}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\mathrm{d}^2 M_y}{\mathrm{d}y^2} + q_\mathrm{o})(\delta w_1 + \delta w_2) \right)\mathrm{d}A$$
$$+[\int_y (M_x \frac{\mathrm{d}\delta w_1}{\mathrm{d}x} - \underbrace{\frac{\mathrm{d}M_x}{\mathrm{d}x}}_{Q_x}\delta(\delta w_1 + \delta w_2))\mathrm{d}y$$
$$+\int_x (M_y \frac{\mathrm{d}\delta w_2}{\mathrm{d}y} - \underbrace{\frac{\mathrm{d}M_y}{\mathrm{d}y}}_{Q_y}\delta(\delta w_1 + \delta w_2))\mathrm{d}x]$$

tasapainoehto ja reunaehdot

$$\frac{\mathrm{d}^2 M_x}{\mathrm{d}x^2}+\frac{\mathrm{d}^2 M_y}{\mathrm{d}y^2}+q_o=0$$

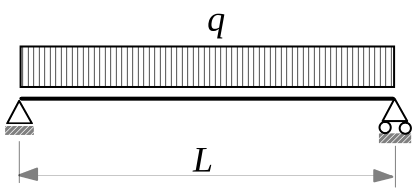
$$\left.\begin{array}{lll} M_x=0 & \text{tai} & \dfrac{\mathrm{d}\delta w_1}{\mathrm{d}x}=0 \\ Q_x=0 & \text{tai} & \delta w_1+\delta w_2=0 \end{array}\right\} \begin{array}{c} y-\text{akselin} \\ \text{suuntaisilla} \\ \text{sivuilla} \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{lll} M_y=0 & \text{tai} & \dfrac{\mathrm{d}\delta w_2}{\mathrm{d}y}=0 \\ Q_y=0 & \text{tai} & \delta w_1+\delta w_2=0 \end{array}\right\} \begin{array}{c} x-\text{akselin} \\ \text{suuntaisilla} \\ \text{sivuilla} \end{array}$$

tasojännitystila $M_x=D(\frac{\mathrm{d}^2 w_1}{\mathrm{d}x^2}+\nu\frac{\mathrm{d}^2 w_2}{\mathrm{d}y^2})$ ja $M_y=D(\frac{\mathrm{d}^2 w_2}{\mathrm{d}y^2}+\nu\frac{\mathrm{d}^2 w_1}{\mathrm{d}x^2})$

tasapainoehdot pelkistyvät $D(\frac{\mathrm{d}^4 w_1}{\mathrm{d}x^4}+\frac{\mathrm{d}^4 w_2}{\mathrm{d}y^4})+q_o=0$

2. Vapaasti päistään tuetun palkin reunaehdot



$$v(0)=v(L)=v''(0)=v''(L)=0$$

reunaehdot toteuttava ratkaisu

$$v(x)=\sum_{n=1}^{\infty} v_n \sin(\frac{n\pi x}{L})$$

kuormituksen sarjakehitelmä

$$p(x)=\sum_{n=1}^{\infty} p_n \sin(\frac{n\pi x}{L})$$

jossa $p_n=\frac{2}{L}\int_0^L q\sin(\frac{n\pi x}{L})\mathrm{d}x=\frac{2q}{L}\left[\frac{-L}{n\pi}\cos(\frac{n\pi x}{L})\right]_{x=0}^{x=L}=\frac{2q}{n\pi}(1-(-1)^n)=\frac{4q}{(2n-1)\pi}$

Sijoittamalla differentiaaliyhtälöön saadaan

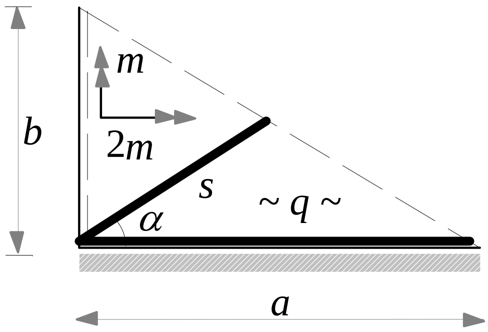
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[EIv_n(\frac{(2n-1)\pi}{L})^4-\frac{4q}{(2n-1)\pi}\right]\sin(\frac{(2n-1)\pi x}{L})=0 \;\Rightarrow\; v_n=\frac{4qL^4}{(2n-1)^5\pi^5 EI}$$

ja edelleen $v(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4qL^4}{(2n-1)^5\pi^5 EI}\sin(\frac{(2n-1)\pi x}{L})$

yksi termi sarjasta $v(L/2)=0.01307qL^4/EI$

$\left(\text{tarkka arvo } v(L/2)=5qL^4/384EI=0.01302qL^4/EI\right)$

3. Kuvasta saadaan



$$\frac{b}{a} = \frac{s\sin\alpha}{a - s\cos\alpha} \quad \Rightarrow s = \frac{ab}{a\sin\alpha + b\cos\alpha}$$

sisäinen virtuaalinen työ

$$W_s = ms\sin\alpha\,\frac{1}{s\cos\alpha} + 2m(a + s\cos\alpha)\frac{1}{s\sin\alpha} = m(\tan\alpha + 2(\frac{a}{b} + \frac{2}{\tan\alpha}))$$
$$= m(\tan\alpha + \frac{4}{\tan\alpha} + 2\frac{a}{b})$$

ulkoinen virtuaalinen työ

$$W_u = \tfrac{1}{3}\tfrac{1}{2}abq = \tfrac{1}{6}qab$$

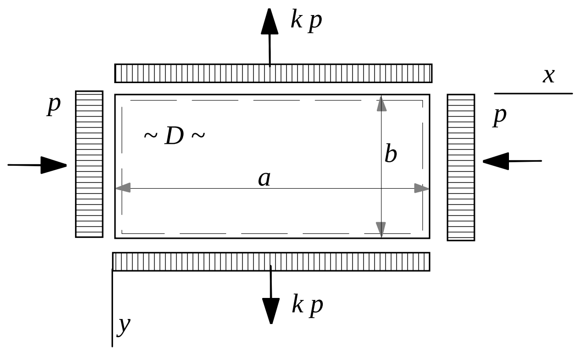
virtuaalisen työn periaate

$$W_u = W_s \quad \Rightarrow \quad q = \frac{6m}{ab}(\tan\alpha + \frac{4}{\tan\alpha} + 2\frac{a}{b})$$

minimointi

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}\alpha} = \frac{6m}{ab}\left(\frac{1}{\cos^2\alpha} - \frac{4}{\sin^2\alpha}\right)(=0) \;\Rightarrow\; \tan\alpha \underset{(-)}{\overset{+}{=}} 2 \;\Rightarrow\; q_p = \frac{6m(4 + 2a/b)}{ab}$$

4. Probleeman osittaisdifferentiaaliyhtälö on



$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = -\frac{p}{D}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{kp}{D}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

ja reunaehdot

$$w(0,y) = w(a,y) = w(x,0) = w(x,b) = 0$$
$$\frac{\partial w}{\partial x}(0,y) = \frac{\partial w}{\partial x}(a,y) = \frac{\partial w}{\partial y}(x,0) = \frac{\partial w}{\partial y}(x,b) = 0$$

Navierin ratkaisu reunoiltaan vapaasti tuetulle laatalle

$$w(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} A_{mn}\sin(\frac{n\pi x}{a})\sin(\frac{m\pi y}{b})$$

sijoittamalla ratkaisu osittaisdifferentiaaliyhtälöön saadaan

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} A_{mn}\left[\frac{n^4\pi^4}{a^4}+2\frac{n^2\pi^2}{a^2}\frac{m^2\pi^2}{b^2}+\frac{m^4\pi^4}{b^4}-\frac{p}{\mathrm{D}}\frac{n^2\pi^2}{a^2}+\frac{kp}{\mathrm{D}}\frac{m^2\pi^2}{b^2}\right]\sin(\frac{n\pi x}{a})\sin(\frac{m\pi y}{b})=0$$

yhtälö toteutuu, kun hakasuluissa oleva lauseke häviää, eli

$$p = D\pi^2\left(\frac{n^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}\right)^2 / \left(\frac{n^2}{a^2}-k\frac{m^2}{b^2}\right)$$

helposti nähdään, että lauseke saa pienimmän arvonsa, kun *m* on mahdollisimman pieni, eli kun $m=1$. Tällöin saadaan

$$p = D\pi^2\left(\frac{n^2}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)^2 / \left(\frac{n^2}{a^2}-k\frac{1}{b^2}\right) \Rightarrow \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}n}=\frac{2n}{a}\left(\frac{n^2}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\left(\frac{n^2}{a^2}-\frac{1+2k}{b^2}\right)=0$$

$\Rightarrow\ n^2=(1+2k)\dfrac{a^2}{b^2}$ ja edelleen $p_{cr}=\dfrac{4(1+k)\pi^2 D}{b^2}$