S-114.1327 Fysiikka III (EST) (6 op) 1. välikoe 10.03.2010 Ilkka Tittonen

1. Vastaa seuraaviin kysymyksiin perustellusti, mutta ytimekkäästi (esim. 5-10 lausetta) (2p per kohta).
   a) Mikä on sidottu tila? Anna lisäksi esimerkki käytännön tilanteesta jossa esiintyy sidottuja tiloja.

Sidottu tila tarkoittaa tilannetta, jossa hiukkasen liike on rajoitettu johonkin tiettyyn tilaan jonkin ulkoisen potentiaalisen ansiosta.

Esimerkkinä elektroni, joka kiertää ydintä on sidotussa tilassa ytimen ja elektronin välisen Coulumbin-voiman ansiosta. (mikä tahansa validi esimerkki käy)

   b) Selitä miten ja miksi kvanttimekaniikan mukaan kaksoisrakokokeessa saadaan vuorotellen tummia ja vaaleita viivoja detektoritasolla, jos kaksoisraolle ohjataan hyvin heikko elektronivirta, esim. luokkaa vain 1 elektroni päivässä?

Kvanttimekaniikan mukaan elektronilla (ja muilla hiukkasilla) on aaltoluonne.

Kahden raon tapauksessa elektronin aaltofunktio menee molempien rakojen läpi, jolloin Hyugenssin periaatteen mukaisesti kumpikin rako toimii uutena aallorintaman lähteenä.

Tällöin elektronin aaltofunktio interferoi itsensä kanssa destruktiivisesti tai konstruktiivisesti.

Pieni virta tarvitaan, jotta ilmiö saadaan näkyviin, sillä suurella virralla tätä ilmiötä ei voida havaita.

   c) Mikä on Compton-efekti? Kerro miten ilmiö havaitaan kokeellisesti ja mikä on efektin kvanttimekaaninen selitys? Miksi Compton-efektiä ei voi ymmärtää klassisen sähkömagnetismin avulla?

Compton efekti tarkoittaa ei-elastista sirontaa, jossa fotoni siroaa elektronista luovuttaen osan energiastaan elektronille. Tämän johdosta sironneen fotonin aallonpituus kasvaa.

Compton havaitsi ilmiön alkuperäisessä kokeessa säteilyttämällä hiilikohtiota röntgensäteilyllä. Hän havaitsi, että osalla taaksepäin sironneesta säteilystä oli huomattavasti pidempi aallonpituus kuin alkuperäisellä säteilyllä. Compton efekti voidaan havaita vain gamma- tai röntgensäteilyllä.

Klassisen sähkömagnetiikan mukaan sironneella valolla pitäisi olla sama aallonpituus, mutta kvanttimekaniikan mukaan fotonilla on liikemäärä eli sitä voidaan samanaikaisesti ajatella hiukkasena (valon kvanttina) ja aaltona, jolloin se voi luovuttaa osan energiastaan elektronille.

2.

a) Mikä on kvanttikaivo? Miten kvanttikaivon koko vaikuttaa energiatiloihin? Jos elektroni on kvanttikaivossa, miten sen käyttäytyminen muuttuu verrattuna tilanteeseen, jossa se olisi ilman kaivon potentiaaliseiniä? (2p)

Kvanttikaivo on potentiaalikaivo, joka rajoittaa hiukkasen liikkeen kahteen ulottuvuuteen.

Kaivon koko vaikuttaa sen energia tilojen määrään ja suuruuteen. Jos kokoa kasvatetaan se lisää tilojen määrää, mutta alentaa energiatilojen energiaa. Ilman seiniä elektroni olisi vapaa, jolloin sen energiatilat muuttuisivat jatkuviksi.

b) Oleta, että kvanttikaivon seinät muodostavat äärettömän korkean potentiaaliseinän ja että sen pituus on L. Mitkä ovat ensimmäisellä viritetyllä tilalla olevan elektronin paikan ja liikemäärän odotusarvot? (4p)

Äärettömän potentiaalikaivon ominaisfunktiot

$$\psi_n = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Ensimmäiselle viritetylle tilalle n=2 (perustila n=1), jolloin paikan odotusarvo on

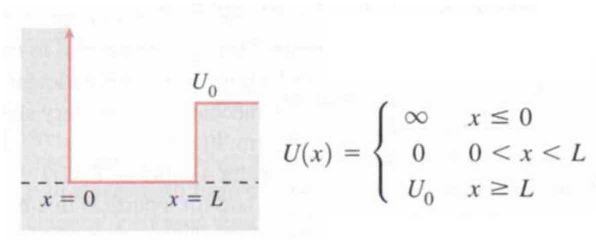
$$\begin{aligned} <x> &= \int_0^L \psi_2^* \,\hat{x}\, \psi_2 dx \\ &= \frac{2}{L}\int_0^L x\sin^2\left(\frac{2\pi x}{L}\right)dx \\ &= \frac{2}{L}\left(\int_0^L \frac{x}{2}dx - \frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)dx\right]_0^L - \frac{1}{2}\int_0^L \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)dx\right) = \frac{L}{2} \end{aligned}$$

ja liikemäärälle

$$\begin{aligned} <p> &= \int_0^L \psi_2^* \,\hat{p}\, \psi_2 dx \\ &= \frac{2}{L}\int_0^L \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\left(-i\hbar\frac{d}{dx}\right)\sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)dx = \\ &-\frac{i\hbar 4\pi}{L^2}\left(\int_0^L \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right)dx\right) = 0 \end{aligned}$$

3. VALITSE joko a) tai b)

a) Elektroni on sidottuna kuvan 1. mukaiseen potentiaalilaatikkoon. Ratkaise Schrödingerin yhtälö ja johda energian kvantisoitumisehto, kun elektronin kokonaisenergia E<U_0. (5p)
Mitä käytännön fysikaalista tilannetta tämä potentiaalin muoto approksimoi? (1p)

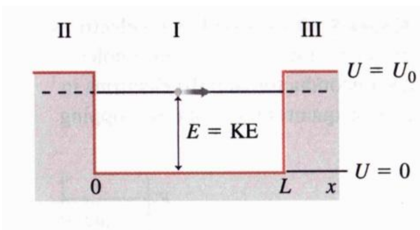


Kuva 1. Puoliääretön potentiaalilaatikko.

a) Katso laskari 5 teht 5.

b) Muodolla voidaan approksimoida esimerkiksi ionisidoksen potentiaalienergiaa tai Van der Waals voiman potentiaalia.

b) Oleta, että elektroni on äärellisen korkuisessa potentiaalilaatikossa oheisen kuvan 2. mukaisesti kokonaisenergian arvolla E (E< U_0). Etsi elektronin ominaistilat ja energian kvantittumisehto. Sinun ei tarvitse etsiä numeerisesti tilojen tarkkoja energioita. (6p)



Kuva 2. Äärellinen potentiaalilaatikko.

Alueessa I, 0 < x < L potentiaalienergia on nolla, jolloin Schrödingerin yhtälö on

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = -k^2\psi(x) \qquad \text{, jossa } k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}.$$

Tässä alueessa yritteeksi käy

$$\psi(x) = A\,sin\,(kx) + B\;\;cos(kx).$$

Alueessa II (x<0) potentiaalienergia on U_0, jolloin Schrödingerin on

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = \alpha^2\psi(x) \qquad \text{, jossa } \alpha = \sqrt{\frac{2m(U_0 - E)}{\hbar^2}}.$$

Yritteeksi käy

$$\psi(x) = Ce^{+\alpha x} + De^{-\alpha x}$$

mutta koska aaltofunktion täytyy kadota, kun $x \to -\infty$ jolloin D=0.

Alueessa III (x>L) on Schrödingerin yhtälö samanlainen kuin alueessa II, jolloin

$$\psi(x) = Fe^{+\alpha x} + Ge^{-\alpha x}$$

Josta termi $e^{+\alpha x}$ **lähestyy ääretöntä, , kun** $x \to \infty$ **jolloin F=0.**

Tällöin meillä on elektronin aaltofunktion ratkaisut kolmessa alueessa

$$\psi(x) = \begin{cases} Ce^{+\alpha x} & x < 0 \\ A\, sin(kx) + Bcos(kx) & 0 < x < L. \\ Ge^{-\alpha x} & x > l \end{cases}$$

Aaltofunktioiden ja niiden derivaattojen täytyy olla jatkuvia pisteissä x=0 ja x=L. Sovelletaan jatkuvuusehtoja funktioihin:

Kohdassa x=0:

$$\begin{gathered} \psi_{II}(0) = \psi_I(0) \\ \to\ Ce^{+\alpha 0} = A\sin(k0) + B\cos(k0) \\ \to C = B \end{gathered} \qquad (1)$$

Ja derivaatta:

$$\begin{gathered} \frac{d}{dx}\psi_{II}(x)\Big|_{x=0} = \frac{d}{dx}\psi_I(x)\Big|_{x=0} \\ \to \alpha\ Ce^{+\alpha 0} = kA\cos(k0) - kB\sin(k0) \\ \to \alpha C = kA \end{gathered} \qquad (2)$$

Kohdassa x=L

$$\begin{gathered} \psi_{III}(L) = \psi_I(L) \\ \to\ Ge^{-\alpha L} = A\ \sin(kL)\ + B\cos(kL) \end{gathered} \qquad (3)$$

Ja derivaatat

$$\begin{gathered} \frac{d}{dx}\psi_{III}(x)\Big|_{x=L} = \frac{d}{dx}\psi_I(x)\Big|_{x=L} \\ \to -\alpha\ Ge^{-\alpha L} = kA\cos(kL) - kB\sin(kL) \end{gathered} \qquad (4)$$

Sijoitetaan yhtälön (3) vasen puoli ($Ge^{-\alpha L}$**) yhtälöön (4). Sijoitetaan amplitudien A ja B lausekkeet yhtälöistä (1) ja (2) muodostettuun yhtälöön, jolloin saadaan seuraava yhtälö**

$$-\alpha\left(\frac{\alpha}{k}C\ \sin(kL)\ + C\cos(kL)\right) = \alpha A\cos(kL) - kC\sin(kL)\ .$$

Amplitudit C:t supistuvat pois. Jaetaan koko yhtälö molemmilta puolilta sinillä jolloin saadaan

$$2\cot(kL) = \frac{k}{\alpha} - \frac{\alpha}{k}$$

Sijoitetaan k:n ja α:n lausekkeet yhtälöön, jolloin saadaan tulokseksi

$$2\cot\left(\sqrt{\frac{2mE}{\hbar}}L\right) = \sqrt{\frac{2U_0E - U_0^2}{E(U_0 - E)}}$$

4.

a) Lasisen tyhjiöputken sisällä on metallinpalanen, jota valaistaan valolla, jonka aallonpituus on 590 nm. Elektronit irtoavat tällä aallonpituudella juuri ja juuri metallista. Miten suuri kineettinen energia on elektroneilla, jotka irtoavat metallista silloin, kun aallonpituus on puolet 590 nanometristä? (4p)

Koska aallonpituudella 590 nm irtoavien elektronien liike-energia on $E_{kin} = 0$, saadaan irroitustyö suoraan fotonien energiasta:

$$\phi = 3{,}37 \cdot 10^{-19}\ J$$

Lasketaan nopeimpien irtoavien elektronien nopeus, kun aallonpituus on puolet 590 nm:stä:

$$\lambda = \frac{1}{2} \cdot 590\ nm \rightarrow E_{k,max} = (6{,}63 \cdot 10^{-34} Js) \cdot \left(2 \cdot \frac{3 \cdot 10^8 m/s}{590 \cdot 10^{-9} m}\right) - 3{,}37 \cdot 10^{-19} J$$
$$= 3{,}37 \cdot 10^{-19} J$$

b) Miten saadaan käytännössä mitattua valosähköisesti irronneiden elektronien kineettinen energia? (2p)

Valosähköisen ilmiön yhtälö on muotoa $qV_0 = E_{kin} = hf - \phi$, eli kun taajuus ja työfunktio tiedetään, voidaan estojännitteen V_0 voimakkuudella säätää katodilta anodille kulkevien elektronien määrää. Kun jännitettä nostetaan ja saavutetaan piste, jossa virtaa ei kulje piirissä on estojännitteen suuruus on yhtä suuri kuin E_{kin}/q. Eli kineettistä energiaa saadaan mitattua estojännitteet avulla.

5. Vastaa seuraaviin kysymyksiin.

a) $\frac{dU}{df} = (k_B T) \cdot \left(\frac{8\pi V}{c^3}\right) \cdot (f^2)$

Oheisen tuloksen luultiin kuvaavan mustasta kappaleesta emittoituvaa säteilyä. Kerro sanallisesti mitä kukin suluissa oleva termi tarkoittaa (HUOM! Tarkoitus ei ole selittää yksittäisiä suureita, vaan kertoa mitä suluissa oleva termi kuvaa). Miksi tulos oli ristiriidassa kokeellisen havainnon kanssa ja miten saadaan tulos, joka vastaa todellisuutta? (2p)

Ensimmäinen termi kuvastaa keskimääräistä energiaa moodia kohti ja toinen termi spektraalista tilatiheyttä. Taajuuden neliö kuuluu tilatiheyden lausekkeeseen. Tämä tulos tunnetaan myös Rayleigh-Jeansin lakina.

Tulos oli ristiriidassa kokeellisten tulosten kanssa, koska suurilla taajuuksilla se kasvaa rajatta. Tämä oli tunnettu nimeltä ”The Ultra-Violet Catastrophe”.

Max Planck sain oikean tuloksen olettamalla, että kaviteetissa olevien atomien energia ei ole jatkuva suure, vaan kvanttittunut.

b) Mitä tarkoitetaan aaltopaketilla? Miten se liittyy Heisenbergin epätarkkuusperiaatteeseen? (2p)

Aaltopaketti on etenevä pulssi, joka koostuu tasoaaltojen superpositiosta erilaisilla aaltovektorin k:n arvoilla eli $\psi = \int_{-\infty}^{\infty} A(k)\ exp(ikx - iwt)\ dk.$

Heisenbergin epätarkkuusperiaatteen mukaan, mitä tarkemmin aaltopaketti on määritelty paikan suhteen, eli mitä lyhyempi pulssi on, sitä suurempi on liikemäärän epätarkkuus. Jos taas liikemäärän epätarkkuus olisi 0, olisi paikan epätarkkuus ääretön ja kyseessä silloin seisova aalto.

c) Miksi elektroni ei ydintä kiertäessään säteile pois kokonaisenergiaansa ja lopulta putoa ytimeen, vaan luonnollisesti pysyy radallansa? (1p)

Elektroni on stationäärisessä tilassa, jolloin sen todennäköisyystiheys ja varaustiheys pysyy vakiona. Tämä johtaa siihen, että elektroni ei ole kiihtyvässä liikkeessä eikä näin voi säteillä energiaa pois.

d) Miten harmonisen oskillaattorin ratkaisuista päästään klassiseen ratkaisuun, jossa hiukkanen liikkuu kahden kääntöpisteen välillä. (1p)

Klassisesti hiukkanen voidaan tavata paikoissa, jossa sen nopeus on alhaisin eli klassisten kääntöpisteiden kohdalla. Kun kvanttimekaanisen oskillaattorien energiaa kasvatetaan, alkaa hiukkasen todennäköisyystiheys keskittymään klassisten kääntöpisteiden lähelle.

Eli voidaan sanoa, että klassinen ja kvanttimekaniikan tulokset lähestyvät toisiaan, kun hiukkasen energia kasvaa eli kun ($\boldsymbol{n} \rightarrow \infty$**).**