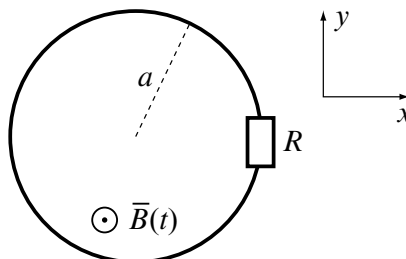


S-96.1121 Dynaaminen kenttäteoria, tentti, 15.1.2009

Ratkaise valintasi mukaan neljä seuraavista viidestä tehtävästä

1. Ympyränmuotoinen virtasilmukka (säde $a = 12$ cm) sijaitsee xy -tasossa tasaaisessa magneettikentässä, joka muuttuu ajan funktiona paloittain lineaarisesti seuraavan mallin mukaisesti

$$\bar{B}(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \bar{u}_z B_0 \frac{t}{T_0}, & 0 \leq t \leq T_0 \\ \bar{u}_z B_0, & T_0 < t \end{cases}$$



Kuinka suuri energia muuttuu vastuksessa $R = 90 \Omega$ lämmöksi, kun $B_0 = 0.28$ T ja $T_0 = 0.16$ ms?

2. Grafiittiin tunkeutumissyvyys on 0.16 mm 100 MHz taajuudella. Määrä tämän tiedon perusteella matka, jolla 4 MHz:n tasoaalto vaimenee grafiitissa 25 dB. (Grafiittia voit pitää molemmilla taajuuksilla erittäin hyvänä johteena)

3. Tasoaalto etenee ilmassa suuntaan $\bar{u} = (\bar{u}_x + \bar{u}_z)/\sqrt{2}$. Magneettikentällä on vain y -suuntainen komponentti, jonka huippuarvo on 10 A/m. Määrä a) sähkökentän kompleksivektori sekä b) kompleksinen Poyntingin vektori \bar{S} . Taajuus on 300 MHz.

4. Suorakulmaisessa ilmaeristeisessä aaltoputkessa etenee TM_{21} -muoto, jonka sähkökentän pitkittäinen komponentti on ajan funktiona

$$E_z(x, y, z, t) = E_0 \sin(20x) \sin(5y) \sin(\omega t - 102z)$$

missä sinien sisältämien numeroarvojen laatu on m^{-1} . Määritä a) aalloitusputkessa, b) aaltoputken leveys a x -suunnassa, c) aaltoputken leveys b y -suunnassa, d) TM_{21} -muodon katketaajuus f_{c21} ja e) aallon taajuus f .

5. Johda Friisin kaava radiolinkkiyhteydelle. Lähetinantennin vahvistus vastaanottimen suuntaan on G_1 ja vastaanotinantennin vahvistus lähettimen suuntaan G_2 . Välimatka on r ja taajuus f . Muistanet, että sieppauspinnan yhteys vahvistukseen on $A_e = \frac{\lambda^2}{4\pi} G$.

- Tentissä saa käyttää laskinta, mutta ei muuta oheismateriaalia

Nablaoperaatiot

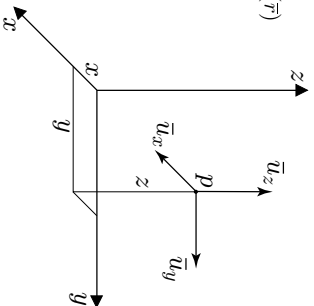
Kartesinen koordinaatio

$$\nabla f(\vec{r}) = \bar{u}_x \frac{\partial}{\partial x} f(\vec{r}) + \bar{u}_y \frac{\partial}{\partial y} f(\vec{r}) + \bar{u}_z \frac{\partial}{\partial z} f(\vec{r})$$

$$\nabla \times \vec{f} = \begin{vmatrix} \bar{u}_x & \bar{u}_y & \bar{u}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_x & f_y & f_z \end{vmatrix}$$

$$\nabla \cdot \vec{f}(\vec{r}) = \frac{\partial}{\partial x} f_x(\vec{r}) + \frac{\partial}{\partial y} f_y(\vec{r}) + \frac{\partial}{\partial z} f_z(\vec{r})$$

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$



Koordinaattimunnokset vektorille \vec{f}

Kartesinen \leftrightarrow sylinterikoordinaatio

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z,$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \arctan(y/x), \quad z = z.$$

$$\begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_\rho \\ f_\varphi \\ f_z \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} f_\rho \\ f_\varphi \\ f_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix}.$$

Vektorii-integraalilaskennan kaavoja

Kartesinen koordinaatio

$$\overline{d\ell} = \bar{u}_x dx + \bar{u}_y dy + \bar{u}_z dz$$

$$\overline{dS}_x = \bar{u}_x dy dz$$

$$\overline{dS}_y = \bar{u}_y dx dz$$

$$\overline{dS}_z = \bar{u}_z dx dy$$

$$dV = dx dy dz$$

Sylinterikoordinaatio

$$\overline{d\ell} = \bar{u}_\rho d\rho + \bar{u}_\varphi \rho d\varphi + \bar{u}_z dz$$

$$\overline{dS}_\rho = \bar{u}_\rho \rho d\varphi dz$$

$$\overline{dS}_\varphi = \bar{u}_\varphi d\rho dz$$

$$\overline{dS}_z = \bar{u}_z \rho d\rho d\varphi$$

$$dV = \rho d\rho d\varphi dz$$

Pallokoordinaatio

$$\overline{d\ell} = \bar{u}_r dr + \bar{u}_\theta r d\theta + \bar{u}_\varphi r \sin \theta d\varphi$$

$$\overline{dS}_r = \bar{u}_r r^2 \sin \theta d\theta d\varphi$$

$$\overline{dS}_\theta = \bar{u}_\theta r \sin \theta dr d\varphi$$

$$\overline{dS}_\varphi = \bar{u}_\varphi r dr d\theta$$

$$dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$$

$$\text{Gaussin lause} \quad \int_V \nabla \cdot \vec{f} dV = \oint_S \vec{f} \cdot \overline{dS}$$

$$\text{Stokesin lause} \quad \int_S \nabla \times \vec{f} \cdot \overline{dS} = \oint_C \vec{f} \cdot \overline{d\ell}$$

Vakioita

$$\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}}$$

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}$$

$$k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}}$$

$$e = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

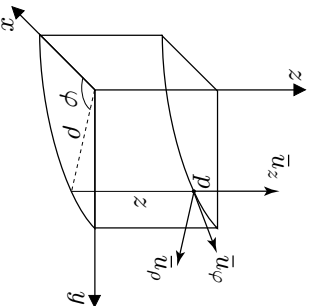
Sylinterikoordinaatio

$$\nabla f(\vec{r}) = \bar{u}_r \frac{\partial}{\partial \rho} f + \bar{u}_\varphi \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} f + \bar{u}_z \frac{\partial}{\partial z} f$$

$$\nabla \times \vec{f} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \bar{u}_\rho & \rho \bar{u}_\varphi & \bar{u}_z \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_\rho & \rho f_\varphi & f_z \end{vmatrix}$$

$$\nabla \cdot \vec{f} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho f_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} f_\varphi + \frac{\partial}{\partial z} f_z$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$



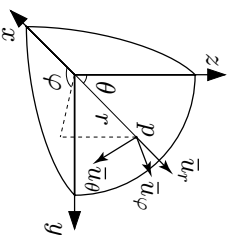
Pallokoordinaatio

$$\nabla f(\vec{r}) = \bar{u}_r \frac{\partial}{\partial r} f + \bar{u}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} f + \bar{u}_\varphi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} f$$

$$\nabla \times \vec{f} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \bar{u}_r & r \bar{u}_\theta & r \sin \theta \bar{u}_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ f_r & r f_\theta & r \sin \theta f_\varphi \end{vmatrix}$$

$$\nabla \cdot \vec{f} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 f_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta f_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} f_\varphi$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$



Kartesinen \leftrightarrow pallokoordinaatio

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta,$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \theta = \arctan \left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \right), \quad \varphi = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

$$\begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \cos \theta \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \sin \varphi & \cos \varphi \\ \cos \theta & -\sin \theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_r \\ f_\theta \\ f_\varphi \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} f_r \\ f_\theta \\ f_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \\ \cos \theta \cos \varphi & \cos \theta \sin \varphi & -\sin \theta \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix}.$$

Sylinteri \leftrightarrow pallokoordinaatio

$$\rho = r \sin \theta, \quad \varphi = \varphi, \quad z = r \cos \theta,$$

$$r = \sqrt{\rho^2 + z^2}, \quad \theta = \arctan(\rho/z), \quad \varphi = \varphi.$$

$$\begin{pmatrix} f_\rho \\ f_\varphi \\ f_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \cos \theta & -\sin \theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_r \\ f_\theta \\ f_\varphi \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} f_r \\ f_\theta \\ f_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta & 0 & \cos \theta \\ \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_\rho \\ f_\varphi \\ f_z \end{pmatrix}.$$