

## Mat-1.1020 Peruskurssi L2

### Välikoe 1 22.02.2010

Täytä selvästi *jokaiseen vastauspaperiin* kaikki otsaketiedot. Merkitse kurssikoodi-kohtaan opintojakson numero, nimi ja onko kyseessä tentti vai välikoe. Koulutusohjelmakoodit ovat ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KJO, KTA, KON, MAK, MAR, PUU, RAK, TFY, TIK, TLT, TUO, YIID.

Kokeessa ei saa käyttää laskinta. Koeaika on 3h.

- a) Laske  $\int_0^1 \operatorname{Arctan} x \, dx$ . b) Näytä, että  $\int_0^1 (\ln x)^n \, dx = (-1)^n n!$  jokaisella  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ .
- Säännöllisestä funktiosta  $f$  tiedetään, että  $0 \leq f'(x) \leq M$ ,  $x \in [0, 1]$ . Arvioi tämän tiedon perusteella approksimaation

$$\int_0^1 f(x) \, dx \approx \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(k/n)$$

virhe (eli [integraalin tarkka arvo] - [liikiarvo]) sekä ylhäältä että alhaalta niin tarkasti kuin mahdollista.

- Ratkaise seuraavat alkuarvotehtävät:

$$\text{a) } y' = 1 + \frac{2}{y-x}, \quad y(1) = 3$$

$$\text{b) } y'' = y' + \frac{2y'}{y'-y}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 3$$

- a) Todista matriisialgebran laskusäännöllä: Jos  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  ja  $\mathbf{C}$  ovat samaa kokoa olevia neliömatriiseja ja  $\mathbf{CA} = \mathbf{AB} = \mathbf{I}$  ( $\mathbf{I}$  = yksikkömatriisi), niin  $\mathbf{B} = \mathbf{C}$ .  
b) Määritä LU-hajotelma matriisille

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

## Mat-1.1020 Grundkurs L2

### Mellanföreläsning 1 22.02.2010

Fyll i tydligt på varje svarspapper samtliga uppgifter. På föreläsningkod och -namn skriv kursens kod, namn samt slutföreläsning eller mellanföreläsning med ordningsnummer. Utbildningsprogrammen är ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KJO, KTA, KON, MAK, MAR, PUU, RAK, TFFY, TIK, TILT, TUO, YHD.

Räknare är inte tillåten. Examenstid 3h.

1. a) Beräkna  $\int_0^1 \operatorname{Arctan} x \, dx$ . b) Visa att  $\int_0^1 (\ln x)^n \, dx = (-1)^n n!$  för varje  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ .
2. Rörande en snäll funktion  $f$  vet vi, att  $0 \leq f'(x) \leq M$ ,  $x \in [0, 1]$ . Bestäm på basen av detta en så bra övre och undre gräns som möjligt för felet (dvs. [integralens exakta värde] - [approximationen]) i approximationen

$$\int_0^1 f(x) \, dx \approx \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(k/n).$$

3. Lös följande begynnelsevärdesproblem:

$$\text{a) } y' = 1 + \frac{2}{y-x}, \quad y(1) = 3$$

$$\text{b) } y'' = y' + \frac{2y'}{y'-y}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 3$$

4. a) Visa med hjälp av räknereglerna av matrisalgebra: Om  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  och  $\mathbf{C}$  är kvadratiska matriser av samma ordning och om  $\mathbf{CA} = \mathbf{AB} = \mathbf{I}$  ( $\mathbf{I}$  = identitetsmatrisen), så är  $\mathbf{B} = \mathbf{C}$ .  
b) Bestäm LU-faktoriseringen till matrisen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$