

Mat-1.3081 Algebra I

Tentti 20.5.2010 klo 9–14

Täytä selvästi *jokaiseen vastauspaperiin* kaikki otsaketiedot. Merkitse kuulustelukoodi-kohtaan opintojakson numero, nimi ja onko kyseessä tentti vai välikoe. ★-kohta jätetään tyhjäksi. Koulutusohjelmakoodit ovat ARK, AUT, EST, INF, KEM, KON, MAA, MAK, MAR, PUU, RYK, TFY, TIK, TLT, TUO.

Calculators, mathematical tables etc are forbidden. You may use at most 4 hours of time.

Remember to justify your answers (unless told otherwise in the exercise).

Kokeessa ei saa käyttää laskimia, taulukoita tai muita apuvälineitä. Koeaika on enintään 4 tuntia.

Muista perustella vastauksesi (ellei tehtävässä toisin mainita).

Questions in English on the other page!

1. Anna esimerkit ryhmistä G ja H , joissa kummassakin on tasan kuusi alkioita, mutta missä ryhmät G ja H eivät ole isomorfiset (ja todista tämä).
2. Selitä miten (murtolukujen) jakokunta \mathbb{Q} muodostetaan (kokonaislukujen) kokonaisalueesta \mathbb{Z} .
3. a) Muotoile polynomien jakoalgoritmi (tätä tulosta ei tarvitse todistaa tässä).
b) Olkoon $J \subset \mathbb{F}[x]$ polynomirenkaan $\mathbb{F}[x]$ ideaali, missä \mathbb{F} on kunta. Osoita, että on olemassa $m(x) \in \mathbb{F}[x]$ siten, että

$$J = \{m(x)f(x) : f(x) \in \mathbb{F}[x]\}.$$

4. Etsi \mathbb{Q} -algebrallisen luvun $u = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ minimipolynomi $f \in \mathbb{Q}[x]$.
5. a) Mikä on ei-vakiopolynomien $f \in \mathbb{Q}[x]$ halkeamiskunta?
b) Mikä on *Galois-ryhmä* $\text{Gal}(\mathbb{E} : \mathbb{F})$?
c) Osoita, että $\sigma(f(u)) = f(\sigma(u))$, kun $\sigma \in \text{Gal}(\mathbb{E} : \mathbb{F})$, $u \in \mathbb{E}$ ja $f \in \mathbb{F}[x]$.

Questions in English on the other page!

Kysymykset suomeksi toisella sivulla!

1. Give examples of groups G and H , where both G and H have exactly six elements, but where G and H are not isomorphic groups (and prove this).
2. Explain how the field of fractions \mathbb{Q} (of rational numbers) is constructed from the integral domain \mathbb{Z} (of integers).
3. a) Formulate the Division Algorithm for polynomials (no need to prove this result here).
b) Let $J \subset \mathbb{F}[x]$ be an ideal of the polynomial ring $\mathbb{F}[x]$, where \mathbb{F} is a field. Show that there exists $m(x) \in \mathbb{F}[x]$ such that

$$J = \{m(x)f(x) : f(x) \in \mathbb{F}[x]\}.$$

4. Find the minimal polynomial $f \in \mathbb{Q}[x]$ of the \mathbb{Q} -algebraic number $u = \sqrt{2} + \sqrt{3}$.
5. a) What is a *splitting field* of a non-constant polynomial $f \in \mathbb{Q}[x]$?
b) What is the *Galois group* $\text{Gal}(\mathbb{E} : \mathbb{F})$?
c) Show that $\sigma(f(u)) = f(\sigma(u))$, if $\sigma \in \text{Gal}(\mathbb{E} : \mathbb{F})$, $u \in \mathbb{E}$ and $f \in \mathbb{F}[x]$.

Kysymykset suomeksi toisella sivulla!