S-114.1327 Fysiikka III (EST) 1. Välikokeen uusinta 20.5.2010

1. a) Erään atomin viritetyn tilan energia voidaan määrätä enintään 1 μeV tarkkuudella. Mikä on tämän tilan elinajan minimiarvo? b) Kappale, jonka massa on 1 μg liikkuu nopeudella 1 cm/s. Nopeus tunnetaan 1 prosentin tarkkuudella. Kuinka tarkkaan hiukkasen paikka voidaan määrätä nopeusvektorin suunnassa?

Ratkaisu

a) Heisenbergin epätarkkuusperiaatteen mukaan elinaika ja pienin energian mittaustulosten keskipoikkeama toteuttavat yhtälön $\Delta E \Delta t \geq h$. Ratkaisemalla elinaika (ajan epätarkkuus) saadaan 4.1 ns. Yhtälössä käytetään usein myös h-baria ($\hbar$) jolloin saadaan hieman poikkeava tulos.

b) Tässä käytetään Heisenbergin yhtälöä paikalle ja liikemäärälle:

$$\Delta p = m \cdot 0,01 \cdot v$$

$$\Delta p \Delta x \geq h \Rightarrow \Delta x \geq \frac{h}{m \cdot 0,01 \cdot v} \geq 6.6 \cdot 10^{-21}\,\mathrm{m}$$

2. Kun kalium metallia valaistiin valolla, jonka aallonpituus oli 450 nm fotoelektronien pysäyttämiseen tarvittava jännite oli 0,52V. Jos valon aallonpituus muutettiin 300 nm:iin vastaava jännite oli 1,90 V. a) Johda energian säilymislain avulla lauseke Planckin vakiolle b) Laske tämän yhtälön avulla Planckin vakion likiarvo sijoittamalla yhtälöön jännitteiden ja aallonpituuksien yllä annetut numeroarvot. c) Laske irrotustyö kaliumille.

Ratkaisu

$$\lambda_1 = 450\mathrm{nm}$$
$$U_1 = 0,52\mathrm{V}$$
$$\lambda_2 = 300\mathrm{nm}$$
$$U_2 = 1,90\mathrm{V}$$

a) Fotonin energia $E = \frac{hc}{\lambda}$, Elektronin kineettinen energia $E_k = eU$, Kaliumin irrotustyö ϕ

Fotonin energia kuluu elektronin irrottamiseen atomista ja sen liike-energiaksi:

$$hf = \phi + (1/2) m_e v^2$$

Elektronin liike-energia muuttuu estojännitteen U johdosta potentiaalienergiaksi: $(1/2) m_e v^2 = eU$, joten Planckin vakiolle saadaan lauseke:

$$h = \frac{\phi}{f} + \frac{e}{f} U$$

Fotonin energia kuluu elektronin irrottamiseen ja elektronin kineettiseksi energiaksi

$$E = E_k + \phi$$
$$\frac{hc}{\lambda} = eU + \phi$$

b) Saadaan yhtälöryhmä

$$\frac{hc}{\lambda_1} = eU_1 + \phi$$
$$\frac{hc}{\lambda_2} = eU_2 + \phi$$

Yhtälöiden erotus on $e(U_1 - U_2) = hc\left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right)$

Ratkaistaan Planckin vakio $h = \frac{e\left(U_1 - U_2\right)}{c\left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right)} = 6,637 \cdot 10^{-34}\,\text{Js} \approx 6,6 \cdot 10^{-34}\,\text{Js}$

c) Irrotustyö on $\phi = \frac{hc}{\lambda_1} - eU_1 = 3,5638 \cdot 10^{-19}\,J \approx 3,6 \cdot 10^{-19}\,J \approx 2,2eV$

3. Ajasta riippumattoman Scrödingerin aaltoyhtälön ratkaisu on muotoa $\psi(x) = D\left(x - x^2\right)$ jos $-2 \le x \le 2$ ja $\psi(x) = 0$ jos $|x| > 2$. Normita aaltofunktio, ja laske millä todennäköisyydellä hiukkanen on välillä $[0,1/2]$?

Ratkaisu

Normitetaan aaltofunktio:

$$\int_{-2}^{2} \left|D\left(x - x^2\right)\right|^2 dx = |D|^2 \int_{-2}^{2} \left(x^2 - 2x^3 + x^4\right) dx = |D|^2 \Big|_{-2}^{2} \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5\right) = |D|^2 \left(\frac{2}{3}8 + \frac{2}{5}32\right) = 1$$
$$\Rightarrow D = \left[\frac{1}{15}(272)\right]^{-1/2} = 0,2953$$

Huomaa että voimme valita D:n reaaliseksi ja positiiviseksi, koska aaltofunktioon voidaan aina lisätä vakiovaihetekijä kertoimeksi.

Todennäköisyys, että hiukkanen on välillä $[0,1/2]$ saadaan integroimalla todennäköisyystiheys:

$$\int_{0}^{1/2} \left|D\left(x - x^2\right)\right|^2 dx = |D|^2 \Big|_{0}^{1/2} \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5\right) = |D|^2 \left(\frac{1}{24} - \frac{1}{32} + \frac{1}{160}\right) =$$
$$\frac{15}{272}\left(\frac{1}{24} - \frac{1}{32} + \frac{1}{160}\right) = 0,000919$$

4. Funktion $\psi(x)$ sanotaan olevan differentiaalioperaattorin $\hat{A}$ ominaisfunktio, jos $\hat{A}\psi(x) = a\psi(x)$, missä a on vakio, jota kutsutaan ominaisarvoksi. Osoita, että $\sin kx$ on operaattorin $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}$ ominaisfunktio. Mikä on vastaava ominaisarvo?

Ratkaisu
Derivoimalla saadaan

$$\frac{d\psi(x)}{dx} = k\cos kx; \quad \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = -k^2 \sin kx = -k^2\psi(x) \ .$$

Tästä seuraa, edelleen:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}=\frac{\hbar^2k^2}{2m}\sin kx=\frac{\hbar^2k^2}{2m}\psi(x)\,.$$

Huomataan siis, että $\sin kx$ on operaattorin $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}$ ominaisfunktio ominaisarvon ollessa $\frac{\hbar^2k^2}{2m}=\frac{p^2}{2m}$.

Ominaisarvo vastaa liikemäärään $p=\hbar k$ liittyvää kineettistä energiaa.

5. Yksiulotteinen potentiaaliaskel on määritelty seuraavasti: $E_p=0$, kun x < 0 ja $E_p=E_0$, kun x>0. Hiukkanen jonka energia on $E=2E_0$, tulee x- akselin negatiivisesta suunnasta potentiaaliaskeleen kohdalle. Mikä on todennäköisyys, että hiukkanen heijastuu takaisin?

Ratkaisu

$$E_p(x)=\begin{cases}0, & x<0 \text{ (alue I)}\\ E_0, & x>0 \text{ (alue II)}\end{cases}\qquad E=2E_0\,.$$

Heijastumistodennäköisyyden ilmaisee heijastumiskerroin (opetusmoniste, yhtälö (2.18))

$$R=\left(\frac{k-k'}{k+k'}\right)^2,$$

missä $k=\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$ on aaltovektorin itseisarvo alueessa I ja $k'=\frac{\sqrt{2m(E-E)}}{\hbar}$ on aaltovektorinitseisarvo alueessa II. Sijoitetaan nämä R:n lausekkeeseen.

$$\therefore\ R=\left[\frac{\sqrt{2mE}-\sqrt{2m(E-E)}}{\sqrt{2mE}+\sqrt{2m(E-E)}}\right]^2=\left[\frac{\sqrt{2mE}\left(1-\sqrt{1-E/E}\right)}{\sqrt{2mE}\left(1+\sqrt{1-E/E}\right)}\right]^2=\left(\frac{1-\sqrt{1-E/E}}{1+\sqrt{1-E/E}}\right)^2.$$

Sijoitetaan $E=2E_0$:

$$\therefore\ R\approx\left(\frac{1-\sqrt{1-E_0/2E_0}}{1+\sqrt{1-E_0/2E_0}}\right)^2=\left(\frac{1-\sqrt{1-1/2}}{1+\sqrt{1-1/2}}\right)^2=\left(\frac{1-\sqrt{1/2}}{1+\sqrt{1/2}}\right)^2\approx 0{,}0294\approx 0{,}03\,.$$

VAKIOITA

$m_e=9{,}1091\times10^{-31}$ kg	$m_p=1{,}6725\times10^{-27}$ kg	$m_n=1{,}6748\times10^{-27}$ kg	amu $=1{,}6605\times10^{-27}$ kg
$e=1{,}6021\times10^{-19}$ C	$c=2{,}9979\times10^{8}$ m/s	$\hbar=1{,}0545\times10^{-34}$ Js	$\mu_B=9{,}2732\times10^{-24}\,\mathrm{JT}^{-1}$
$\varepsilon_0=8{,}8544\times10^{-12}\,\mathrm{C^2N^{-1}m^{-2}}$	$K_e=1/4\pi\varepsilon_0$	$\mu_0=1{,}2566\times10^{-6}$ mkgC^{-2}	$K_m=\mu_0/4\pi$
$\gamma=6{,}670\times10^{-11}\,\mathrm{Nm^2kg^{-2}}$	$N_A=6{,}0225\times10^{23}\,\mathrm{mol^{-1}}$	$R=8{,}3143\ \mathrm{JK^{-1}mol^{-1}}$	$k=1{,}3805\times10^{-23}\ \mathrm{JK^{-1}}$
$\lambda_C=h/(m_ec)$			