S-114.1327 Fysiikka III (EST) 2 Välikokeen uusinta 20.5.2010

1. Radioastronomiassa käytetään galaksien sähkömagneettisessa spektrissä olevaa viivaa, jonka aallonpituus on 21 cm, galaksin tutkimiseen. Viivan aiheuttavat fotonit emittoituvat galaksissa olevien vetyatomien elektronin spinin suunnan kääntyessä. Kuinka suuri on magneettivuon tiheys kentässä, jonka kanssa kyseiset elektronit vuorovaikuttavat?

Ratkaisu

Spin-magneettimomentin kääntymiseen liittyvä energia on

$$\Delta E_s = g_s \frac{e\hbar}{2m_e} B\Delta m_s .$$

Tämä on prosessissa emittoituvan fotonin energia, ts.

$$\Delta E_s = E_{fotoni} = \frac{hc}{\lambda} .$$

Näistä yhtälöistä saadaan

$$\frac{hc}{\lambda} = g_s \frac{e\hbar}{2m_e} B\Delta m_s = g_s \frac{eh}{4\pi m_e} B\Delta m_s ,$$

josta edelleen

$$B = \frac{4\pi c m_e}{g_s e\lambda \Delta m_s} \approx \frac{4\pi \cdot 2,9979 \cdot 10^8 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 9,1091 \cdot 10^{-31}\mathrm{kg}}{2,0024 \cdot 1,6021 \cdot 10^{-19}\mathrm{C} \cdot 0,21\,\mathrm{m} \cdot \left[\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right)\right]} \approx \underline{\underline{51\,\mathrm{mT}}} .$$

Yksiköt: $\frac{\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot \mathrm{kg}}{\mathrm{C} \cdot \mathrm{m}} = \frac{\mathrm{kg}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot \mathrm{s}}{\mathrm{Cm}} = \frac{\mathrm{Ns}}{\mathrm{Cm}} = \frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{m}^2} = \mathrm{T}$

2. Litiumatomissa $(Z = 3)$ kaksi elektroneista on alimmalla energiatilalla $(n = 1)$ ja kolmas elektroni seuraavalla orbitaalilla, jonka pääkvanttiluku $n = 2$. Ulomman elektronin energiaa ytimen ja sisempien elektronien muodostamassa potentiaalissa voidaan approksimoida lausekkeella

$$E = -Z_{eff}^2 \frac{E_1}{n^2}$$

missä Z_{eff} on ytimen efektiivinen varaus, joka ottaa huomioon sisempien elektronien varjostavan vaikutuksen ($Z_{eff} < 3$). Laske Z_{eff} kun tiedetään, että litiumin ensimmäinen ionisaatioenergia on 5,39 eV.

Ratkaisu:

Litimumin kolmesta elektronista kaksi on 1s-kuorella ja ylin kolmas elektroni 2s-kuorella. Tehtävässä tarkasteltavassa mallissa on tarkoitus kuvata litiumatomin ydintä ja kahta 1s-elektronia yhtenä kokonaisuutena joka vastaa vetyatomin ydintä. Tälläisessa mallissa ero

vetyatomiin tulee ns. efektiivisestä varauksesta, jonka avulla mallit liitetään toisiinsa. Nyt siis energia E_1 on sama kuin vetyatomin mallissa eli

$$E_1 \approx 13,6eV \ .$$

2s (pääkvanttiluku $n = 2$) oleva elektroni on helpoin irrottaa atomista, jolloin ensimmäinen ionisaatioenergia on merkkiä vaille sama kuin E_2.

Ratkaistaan Z_{eff} kaavasta $E = -Z_{eff}^2 \frac{E_1}{n^2}$:

$$Z_{eff} = \sqrt{\frac{-n^2 E}{E_1}} \ .$$

Sijoittamalla energiaksi 2s-tilan ominaisenergia (eli ionisaatioenergian vastaluku) = -5,39eV, saadaan:

$$Z_{eff} = \sqrt{\frac{-2^2(-5,39eV)}{13,6eV}} \approx 1,26 \ .$$

Tämä tarkoittaa, että litiumin kaksi 1s-elektronia varjostavat ytimen positiivisesta 3*e* suuruisesta varauksesta 1,74*e* verran sillä alueella missä litiumin uloin eli 2s-elektroni liikkuu.

3. HCl-kaasu absorboi voimakkaasti infrapunasäteilyä, jonka aallonpituus on 3,465 µm. Määritä HCl-molekyylin a) voimavakio, b) nollapiste-energia. Vedyn atomimassa on $1,0079$ amu ja kloorin $35,4527$ amu.

Ratkaisu

HCl-molekyyliä voidaan käsitellä lineaarisena harmonisena oskillaattorina, jolle

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_o \ .$$

Transition valintasääntö on $\Delta n = \pm 1$, joten

$$\Delta E_n = \left(n + 1 + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_o - \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_o = \hbar\omega_o = \frac{h}{2\pi}\omega_o \ .$$

Fotonin absorboituessa HCl-molekyylin energia kasvaa tämän verran. Saadaan siis

$$\frac{h}{2\pi}\omega_o = h\frac{c}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \omega_o = \frac{2\pi c}{\lambda} \approx \frac{2\pi \cdot 2,9979 \cdot 10^8 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{3,465 \cdot 10^{-6}\mathrm{m}} \approx 5,436 \cdot 10^{14} \frac{1}{\mathrm{s}} \ .$$

a) Harmoniselle oskillaattorille

$$\omega_o = \sqrt{\frac{k}{\mu}} \quad \Rightarrow \quad k = \mu\omega_o^2 = \frac{m_H m_{Cl}}{m_H + m_{Cl}}\omega_o^2$$

$$\therefore \; k \approx \frac{1,0079 \cdot 35,4527}{1,0079 + 35,4527} \cdot 1,6605 \cdot 10^{-27}\,\text{kg}\left(5,4362 \cdot 10^{14}\right)^2 \frac{1}{\text{s}^2} \approx \underline{\underline{481\,\frac{\text{N}}{\text{m}}}}.$$

b) Nollapiste-energia on

$$E_o = \frac{1}{2}\hbar\omega_o \approx \frac{1}{2} \cdot 1,0545 \cdot 10^{-34}\,\text{Js} \cdot 5,4362 \cdot 10^{14}\,\frac{1}{\text{s}} \approx \underline{\underline{0,179\text{ eV}}}$$

4 Laske ideaalikaasun molekyylien lukumäärän (energian yksikköväliä kohden) energialla $E_1 = 0.2$ eV suhde lukumäärään energialla $E_2 = 0.02$ eV eli suhde $\left(dn/dE\right)_{E=E_1} \Big/ \left(dn/dE\right)_{E=E_2}$, kun kaasun lämpötila on (a) 100 K, (b) 300 K, ja (c) 600 K.

Ratkaisu

Merkitään E_1 = 0,2 eV, E_2 = 0,02 eV. Maxwell - Boltzmannin energiajakauma antaa molekyylien lukumäärän energiayksikköä kohti:

$$\frac{dn}{dE} = \frac{2\pi N}{\left(\pi kT\right)^{3/2}} E^{1/2} e^{-E/kT}.$$

Lukumäärien suhde energioilla E_1 ja E_2 on tämän mukaan

$$\frac{\left(dn/dE\right)_{E_1}}{\left(dn/dE\right)_{E_2}} = \left(\frac{E_1}{E_2}\right)^{1/2} e^{-\left(E_1 - E_2\right)/kT}.$$

T = 100 K

$$\frac{\left(dn/dE\right)_{E_1}}{\left(dn/dE\right)_{E_2}} \approx 2,7 \cdot 10^{-9}.$$

b) T = 300 K

$$\frac{\left(dn/dE\right)_{E_1}}{\left(dn/dE\right)_{E_2}} \approx \underline{\underline{3,0 \cdot 10^{-3}}}.$$

c) T = 600 K

$$\frac{\left(dn/dE\right)_{E_1}}{\left(dn/dE\right)_{E_2}} \approx \underline{\underline{9,7 \cdot 10^{-2}}}.$$

5 Osoita, että harmonisen oskillaattorin keskimääräisen energiatilan kvanttiluku n (lämpötilassa T) on

$$\langle n \rangle = \frac{1}{e^{\hbar\omega/kT} - 1}.$$

Ratkaisu

Oletetaan, että systeemissä on 1 oskilaattori ja lasketaan sen keskimääräinen energia. Oletetaan aluksi N oskillaattoria ja sovelletaan MB-jakaumaa. Energia voidaan esittää tilasumman Z avulla:

$$Z = \sum_{i=0}^{\infty} g_i e^{-E_i/kT} = \sum_{i=0}^{\infty} e^{-(i+1/2)\hbar\omega_0/kT} = e^{-\hbar\omega_0/2kT} \sum_{i=0}^{\infty} e^{-i\hbar\omega_0/kT}$$

Tilasumma on geometrinen sarja mikä huomataan jos sijoitetaan $x = e^{-\hbar\omega_0/kT}$. Huomaa että $e^{-\hbar\omega_0/kT} \leq 1$ joten sarja suppenee. Geometrisen sarjan summan avulla

$$\sum_{i=0}^{\infty} e^{-i\hbar\omega_0/kT} = \sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x} \Rightarrow Z = e^{-\hbar\omega_0/2kT}\left(\frac{1}{1-e^{-\hbar\omega_0/kT}}\right)$$

Systeemin energia on $U = NkT^2 \frac{d}{dT} \ln Z = U = \frac{1}{2} N\hbar\omega_0 + N\hbar\omega_0 \left(\frac{1}{e^{\hbar\omega_0/kT} - 1}\right)$ eli yhdelle oskillaattorille

$$\frac{U}{N} = \frac{1}{2}\hbar\omega_0 + \hbar\omega_0 \left(\frac{1}{e^{\hbar\omega_0/kT} - 1}\right).$$

Tämän tulee olla yhtäsuuri kuin $\hbar\omega_0 / 2 + \langle n \rangle \hbar\omega_0$. Ratkaisemalla keskimääräisen kvanttiluvun $\langle n \rangle$ suhteen saamme

$$\langle n \rangle = \frac{1}{e^{\hbar\omega/kT} - 1}.$$

VAKIOITA

$m_e = 9{,}1091 \times 10^{-31}$ kg	$m_p = 1{,}6725 \times 10^{-27}$ kg	$m_n = 1{,}6748 \times 10^{-27}$ kg	amu $= 1{,}6605 \times 10^{-27}$ kg
$e = 1{,}6021 \times 10^{-19}$ C	$c = 2{,}9979 \times 10^{8}$ m/s	$\hbar = 1{,}0545 \times 10^{-34}$ Js	$\mu_B = 9{,}2732 \times 10^{-24}$ JT^{-1}
$\varepsilon_0 = 8{,}8544 \times 10^{-12}$ C^{2}N^{-1}m^{-2}	$K_e = 1/4\pi\varepsilon_0$	$\mu_0 = 1{,}2566 \times 10^{-6}$ mkgC^{-2}	$K_m = \mu_0 / 4\pi$
$\gamma = 6{,}670 \times 10^{-11}$ Nm^{2}kg^{-2}	$N_A = 6{,}0225 \times 10^{23}$ mol^{-1}	$R = 8{,}3143$ JK^{-1}mol^{-1}	$k = 1{,}3805 \times 10^{-23}$ JK^{-1}
$\lambda_C = h/(m_e c)$			