Aalto yliopiston teknillinen korkeakoulu Gripenberg, Arponen, Siljander
Mat-1.1040 L4
Tentti ja välikokeiden uusinta 21.5.2010

Kirjoita jokaiseen koepaperiin nimesi, opiskelijanumerosi ym. tiedot !
Laskin (yo-kirjoituksissa hyväksytty) on sallittu apuväline tässä kokeessa!

Kirjoita selvästi jokaiseen paperiin minkä kokeen suoritat.
Tentin tehtävät ovat 5 tehtävää tehtävistä 2, 3, 5, 7, 10 ja 11.
Uusintavälikokeiden tehtävät ovat
1. vk: 1–4
2. vk: 5–8
3. vk: 9–12

1. Jos Fourier-muunnos määritellään kaavalla $\hat{f}(\boldsymbol{\omega}) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{x}} f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}$ (esimerkiksi kun f on jatkuva funktio, joka on identtisesti nolla jonkin rajoitetun joukon ulkopuolella, jolloin integraaliin määrittelyssä ei ole ongelmia) niin pätee $\int_{\mathbb{R}^d} |\hat{f}(\boldsymbol{\omega})|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{\omega} = \int_{\mathbb{R}^d} |f(\mathbf{x})|^2\,\mathrm{d}\mathbf{x}$. Jos sen sijaan määritellään $g(\boldsymbol{\omega}) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{x}} f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}$ on olemassa vakio c siten, että $\int_{\mathbb{R}^d} |g(\boldsymbol{\omega})|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{\omega} = c\int_{\mathbb{R}^d} |f(\mathbf{x})|^2\,\mathrm{d}\mathbf{x}$. Määritä edellä olevien tietojen perusteella vakio c.

2. Määritä funktion $f(t) = t\mathrm{e}^{-|t|}$ Fourier-muunnos. Voit käyttää hyväksi tietoa, että funktion $g(t) = \mathrm{e}^{-|t|}$ Fourier-muunnos on $\hat{g}(\omega) = \frac{2}{4\pi^2\omega^2+1}$.

3. Funktio $f(t) = 2$, $t \in \mathbb{R}$ määrittää vaimennetun distribuution. Mikä on tämän vaimennetun distribuution Fourier-muunnos? (Perustele!)

4. Tunnetusti funktio u on harmoninen avoimessa joukossa $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ jos u on jatkuva Ω:ssa ja jokaisella $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ on olemassa jono $r_n \to 0+$ siten, että kun n on riittävän iso niin $u(\mathbf{x}_0)$ on keskiarvo funktion u arvoista r_n-säteisen, $\mathbf{x}_0$-keskisen pallon pinnalla. Osoita tämän tuloksen avulla, että jos u on harmoninen joukossa $\{\,(x,y) : y > 0\,\}$, jatkuva joukossa $\{\,(x,y) : y \geq 0\,\}$ ja $u(x,0) = 0$ ja jos $v(x,y) = u(x,y)$ kun $y \geq 0$ ja $v(x,y) = -u(x,-y)$ kun $y < 0$ niin v on harmoninen $\mathbb{R}^2$:ssa.

5. Olkoon $\Omega = \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = r\cos(\theta),\ y = r\sin(\theta),\ 0 < r < 1,\ 0 < \theta < \frac{5\pi}{4}\,\}$ ja olkoon $u(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) = r^{\frac{4}{5}}\sin(\frac{4}{5}\theta)$. Onko u harmoninen joukossa Ω? Onko u:n osittaisderivaatoilla raja-arvot kun $(x,y) \to \partial\Omega$? (Perustele!)
Vihje: Napakoordinaateilla Laplace-operaattori Δ *on* $\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}$. *Jos* $u \in C^1(\overline{\Omega})$ *funktiolla* $r \mapsto u(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$ *olisi derivaatta, jolla olisi raja-arvo kun* $r \downarrow 0$ *jokaisella* $\theta \in (0, \frac{5\pi}{4})$.

6. Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ avoin ja rajoitettu. Selitä miten lämpöyhtälön maksimiperiaatteen avulla voidaan osoittaa, että on olemassa korkeintaan yksi funktio $u \in \mathcal{C}^{(2,1)}(\Omega \times (0,T)) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega} \times [0,T))$, joka on lämpöyhtälön ratkaisu joukossa $\Omega \times (0,T)$ ja sellainen, että $u(\mathbf{x},0) = g(\mathbf{x})$ kun $\mathbf{x} \in \Omega$ ja $u(\mathbf{x},t) = h(\mathbf{x},t)$ kun $\mathbf{x} \in \partial\Omega$ ja $t \in (0,T)$.

7. Ratkaise aaltoyhtälö

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) = c^2 u_{xx}(x,t), \\ u_x(0,t) = 0, \\ u(x,0) = g(x), \\ u_t(x,0) = h(x), \end{cases} \qquad x > 0, \quad t > 0.$$

8. Määritä yhtälön $\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) + \frac{\partial}{\partial x}f(u(x,t))) = 0$ ratkaisu kun $t > 0$ olettaen, että $f(u) = u + u^3$ ja $u(x,0) = 2$ kun $x < 1$ ja $u(x,0) = 1$ kun $x > 1$.

9. Olkoon

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -L/2 \le x \le L/2 \\ 0, & L/2 < |x| \le L. \end{cases}$$

(a) Laske sen koko (reaalinen) Fourier-sarja. Onko suppeneminen tasaista tarkasteluvälillä $[-L, L]$?
(b) Mihin sarja suppenee kun $x = \pm L$?
(c) Kuinka nopeasti σ_N^2 pienenee?

10. Diskretoi (keskeis)differenssimenetelmällä Dirichlet-Neumann reuna-arvotehtävä

$$\begin{cases} -u''(x) + qu(x) = f(x), & x \in (0,1), \\ u(0) = 0,\ u'(1) = 0 \end{cases}$$

jossa $q > 0$ ja f jatkuva.

11. Aaltoyhtälön

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, & 0 < x < 1,\ t > 0, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, \\ u(x,0) = f(x),\ u_t(x,0) = g(x) \end{cases}$$

diskretoinnissa eräällä 2-askelmenetelmällä päädyttiin systeemiin:

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}_h^{k+1} = 2\boldsymbol{u}_h^k - \boldsymbol{u}_h^{k-1} + c^2\delta^2\Delta_h \boldsymbol{u}_h \\ \boldsymbol{u}_h^0 = \boldsymbol{f}_h,\ \boldsymbol{u}_h^1 = (\boldsymbol{I} + \frac{c^2\delta^2}{2}\Delta_h)\boldsymbol{f}_h + \delta \end{cases}$$

Millainen stabiiliusehto δ:lle näistä johdettiin? (Vihje: Δ_h:n ominaisvektoreista alkavien ratkaisujen (energian) ei tulisi kasvaa eikä vaimeta.)

12.

(a) Kirjoita tehtävälle

$$\begin{cases} -u''(x) + xu(x) = 1, & x \in (0,1), \\ u(0) = 0,\ u'(1) = 1, \end{cases}$$

variaatioformulaatio.

(b) Muodosta vastaava Galerkin-approksimaatio-probleema funktioiden $v_1(x) = x$, $v_2(x) = x^2$ virittämässä aliavaruudessa. Huom: tämän tulosta ei tarvitse kuitenkaan ratkaista.