

Mat-1.1120 Matematiikan peruskurssi C2, kevät 2010

Ylioppilastutkinnossa kelpaavat laskimet sallittu. Merkitse vastauspaperiin selvästi teetkö tentin vai uusitko yhden kolmesta välikokeesta.

PERUSTELE VASTAUKSESI!

Tentti, 21.5.2009

- T1. 1. välikoe tehtävä 1.3.
- T2. 1. välikoe tehtävä 1.4.
- T3. 2. välikoe tehtävä 2.1.
- T4. 2. välikoe tehtävä 2.2.
- T5. 3. välikoe tehtävä 3.3.
- T6. 3. välikoe tehtävä 3.4.

1. välikoe

- 1.1 Onko raja-arvo $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{\sin(k)}{k^3}$ olemassa?
- 1.2 Kehitä origossa funktion $f(x) = 3x^3 + 2x^2 + x$ Taylorin sarja (määritelmään perustuen).
- 1.3 Oletetaan jatkuvasta ja differentioituvasta funktiosta $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, että $g(1,1) = 1$ ja $\nabla g(1,1) = (1,2)$. Laske lineaarinen approksimaatio arvolle $g(1.1,1.3)$.
- 1.4 Funktioiden $f, g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ osittaisderivaattojen matriiseille, eli Jakobin $(n \times n)$ matriiseille pätee ketjusääntö, joka muistuttaa kovasti yhden muuttujan funktioiden derivaatan ketjusääntöä ja joka käsiteltiin kurssilla. Muotoile huolellisesti ja todista tämä ketjusääntö kun $n = 2$.

2. välikoe

- 2.1 Etsi ja luokittele funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - 4x + 4y$ kriittiset pisteet.
- 2.2 Tarkastellaan kuutiota $[0,1]^3$. Kuutio ajatellaan epähomogeeniseksi kappaleeksi, jossa aineen tiheys noudattelee jatkuvaa funktiota $f: [0,1]^3 \rightarrow (0,\infty)$. Muodosta tämän kappaleen painopisteen koordinaatit funktion f avulla.
- 2.3 Ratkaise differentiaaliyhtälö $y' - \frac{2y}{x} = x^2$.

- 2.4 Laske kolmiulotteiseen alueen M voluumi, missä M on kartion $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ sisustan ja pallon $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ leikkaus.

3. välikoe

- 3.1 Mitkä seuraavista kokoelmista reaalisia 2×2 matriiseja muodostavat ryhmän matriisitulon suhteen? Myönteisessä tapauksessa riittää tunnistaminen ryhmäksi, neutraali-alkion ja käänteisalkion määrääminen. Kielteisessä tapauksessa anna perustelu.
- (a) Diagonaalimatriisit, joiden diagonaali-alkiot ovat nolosta poikkeavia.
 - (b) Symmetriset matriisit ($A^T = A$).
 - (c) Kokonaislukukertoimiset kääntyvät matriisit.
- 3.2 Tarkastellaan multiplikatiivista jäännösluokkaa \mathbb{Z}_9^* modulo 9.
- (a) Määrää ryhmän \mathbb{Z}_9^* alkiot.
 - (b) Onko ryhmä \mathbb{Z}_9^* isomorfinen additiivisen jäännösluokkaryhmän \mathbb{Z}_6 kanssa?
- 3.3 Tarkastellaan neljän alkion permutaatioryhmää S_4 .
- (a) Etsi jokin sen kuuden alkion aliryhmä.
 - (b) Kuinka monta kuuden alkion aliryhmää löytyy?
- 3.4 Helminauha koostuu kahdeksasta valkoisesta helmestä ja neljästä mustasta helmestä. Kuinka monta erilaista (12-helmistä) helminauhaa niistä voidaan muodostaa?