1/8
FIN

T-61.3010 Digitaalinen signaalinkäsittely ja suodatus

2. välikoe / tentti. Ke 19.5.2010 klo 15-18. Salit D, E.

2. vk on oikeus tehdä vain kerran joko 10.5. tai 19.5. Tee välikokeessa tehtävät 1, 2 ja 8 (palaute).

Tentti on oikeus tehdä vain kerran joko 10.5. tai 19.5. Tee tentissä tehtävät 3, 4, 5, 6, 7 ja 8 (palaute). Aloita kukin tehtävä uudelta sivulta.

Tilaisuudessa ei saa olla oma funktiolaskinta eikä taulukkokirjaa. Jaossa on kurssin taulukkomoniste. Tehtävää 1 (välikoe) varten on erillinen vastauslomake.

Palautusohjeet:

- esitä opiskelijakorttisi palautuksen yhteydessä
- jos välikoe: tehtävän 1 vastauslomake ("rasti ruutuun") omaan pinoon **"VK2-MONIVALINTA"**, täytettävä vähintään opiskelijanumero **JA** tehtävän 2 vastauskonsepti omaan pinoon **"VK2-KONSEPTI"**, täytettävä vähintään konseptin ylälaidan tiedot
- jos tentti: kaikki vastauskonseptit sisäkkäin omaan pinoon **"TENTTI"**
- suttupaperit omaan pinoon **"SUTTU"**
- tehtäväpaperin ja taulukkomonisteen voi pitää itsellään

1) (10 x 1p, 0-9 p, **VAIN VÄLIKOE**) Monivalinta. Väittämissä on 1–4 oikeaa vastausta, mutta valitse **yksi ja vain yksi.** Täytä **erillisille lomakkeelle**, joka luetaan optisesti. **Mustaa ruudut**, hailakka rasti voi jäädä lukematta.

Oikea valinta +1 p, väärä valinta −0.5 p, ei valintaa 0 p. Perusteluja ei tarvita. Vastaa niin moneen kuin haluat. Tehtävän maksimipistemäärä on 12 ja minimimäärä 0.

1.1 Kausaalinen ja stabiili LTI-suodin

$$H(z) = \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{1 - 1.3z^{-1} + 0.4z^{-2}}$$

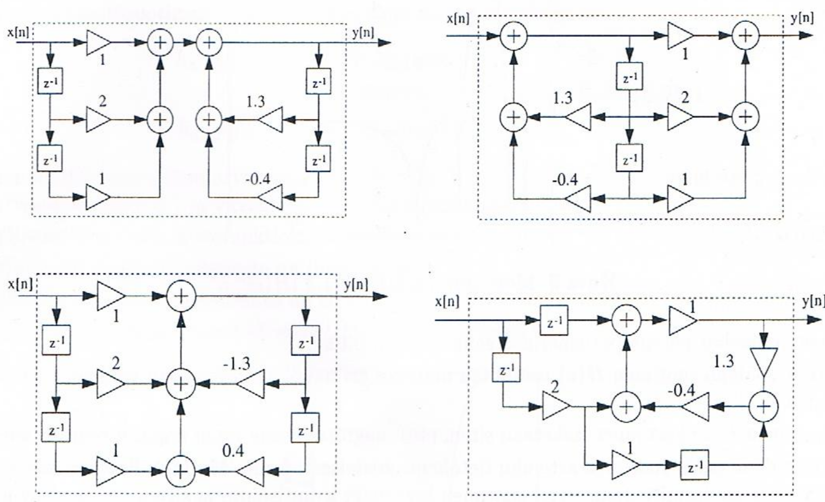
on esitetty viiveiden suhteen kanonisessa (yksinkertaisessa) suoran muodon II ("direct form II") -rakenteena

(A) kuvassa 1(a).

(B) kuvassa 1(b).

(C) kuvassa 1(c).

(D) kuvassa 1(d).



Kuva 1: Monivalintatehtävän 1.1 rakenteet, ylärivissä (A) ja (B) , alarivissä (C) ja (D) .

18

1.2 Tutkitaan digitaalista LTI-järjestelmää kuvassa 2, jossa mukana apumuuttujat $v[n]$ ja $w[n]$ ja kaksi kerrointa ovat 0.5 ja −0.5. Näiden avulla saadaan yhtälöryhmä

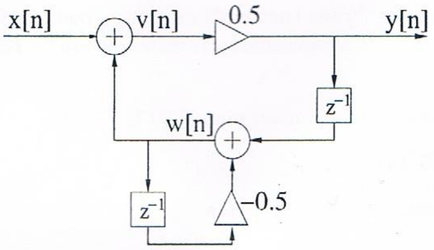
$$\begin{aligned} v[n] &= x[n] + w[n] \\ w[n] &= -0.5w[n-1] + y[n-1] \\ y[n] &= 0.5v[n] \end{aligned}$$

(A) Koska suodin on piirretty suora muoto I -rakenteena ("direct form I"), nähdään sen asteluvun olevan kaksi

(B) Muokattaessa suodin suoran muodon ("direct form") esitykseen havaitaan sen olevan ensimmäisen asteen FIR-suodin

(C) Kuvan rakenne on kanoninen viiveiden suhteen

(D) Suotimen impulssivasteen arvot ovat $h[n] = \{\underline{0.5}, 0.25, 0.125, 0.0625, \ldots\}$



Kuva 2: Monivalintatehtävän 1.2 suodinrakenne.

1.3 LTI-suotimen $H(z)$ neliöllinen magnitudivaste $|H(e^{j\omega})|^2$ on esitetty kuvassa 3. Sen maksimi on 20 dB, joka saadaan kaavasta

$$10 \cdot \log_{10}\left(\frac{H_{max}^2}{H_1^2}\right) = 20 \cdot \log_{10}\left(\frac{H_{max}}{H_1}\right) = 20 \text{ dB}$$

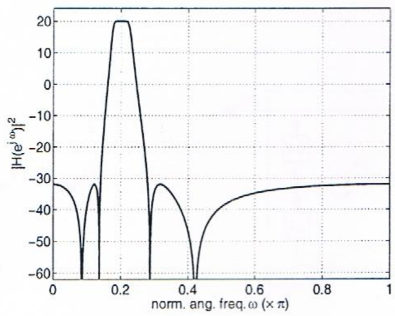
jossa $H_1 = 1$. Mikä on vahvistuksen/vaimennuksen K arvo, jotta maksimivahvistus $\max\{K \cdot H(z)\} = 1$ eli 0 dB?

(A) $K = 1/\infty$

(B) $K = 0.1$

(C) $K = 5/\pi$

(D) $K = 10$



Kuva 3: Monivalintatehtävän 1.3 $|H(e^{j\omega})|^2$

1.4 Suodinsuunnittelun yhtenä perusperiaatteena voidaan pitää

(A) Analysoidaan suotimen $H(z)$ toimintaa monesta eri näkökulmasta, jotta voidaan varmistua, onko suodin stabiili vai ei

(B) Suotimen $H(z)$ kertoimet lasketaan siten, että magnitudivaste nipin napin toteuttaa annetut vaatimukset

(C) Arvioidaan ensin suotimen asteluku tietokoneavusteisesti (esim. Matlab), lisätään astelukuun pieni määrä (+2 tai +4) jotta varmistutaan, ettei suotimen kertoimet kvantisoidu, ja sitten tietokoneavusteisesti lasketaan varsinaiset kertoimet $H(z) = B(z)/A(z)$

(D) Sijoitetaan haluttu määrä nollia d_m ja napoja p_n napanollakuvioon ja lasketaan $H(z)$:n kertoimet tietokoneavusteisesti muodosta

$$H(z) = G \cdot \frac{\prod_{m=1}^{M}(1 - d_m z^{-1})}{\prod_{n=1}^{N}(1 - p_n z^{-1})}$$

1.5 Bilineaarimuunnos on yksi-yhteen-kuvaus (bijektio) s-tason (analoginen suodin) ja z-tason (digitaalinen suodin) välillä. Olkoon valittuna näyteväli $T = 2$, jolloin muunnos ja sen käänteisoperaatio ovat

$$s = \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}, \qquad z = \frac{1 + s}{1 - s}$$

Tarkastellaan s-tason pisteitä $s = \sigma_0 + j\Omega_0$, jolloin

$$\begin{aligned} z &= \frac{1 + (\sigma_0 + j\Omega_0)}{1 - (\sigma_0 + j\Omega_0)} = \frac{(1 + \sigma_0) + j\Omega_0}{(1 - \sigma_0) + j\Omega_0} \\ \Rightarrow |z|^2 &= \frac{(1 + \sigma_0)^2 + (\Omega_0)^2}{(1 - \sigma_0)^2 + (\Omega_0)^2} \end{aligned}$$

(A) Jos s-tason kaikki navat s_i ovat vasemmassa puolitasossa, niin kaikki vastaavat digitaalisen suotimen navat z_i ovat myös vasemmassa puolitasossa z-tasossa

(B) Jos s-tason navan reaaliosa $\sigma_0 = 0$, niin tällöin napa kuvautuu z-tasossa aina samaan pisteeseen $z = 1$ riippumatta Ω_0:n arvosta

(C) Jos s-tason navan reaaliosa $\sigma_0 < 0$, niin napa kuvautuu z-tasoon 1-säteisen ympyrän sisäpuolelle

(D) Jos s-tason kaikki navat s_i ovat oikeassa puolitasossa, niin kaikki vastaavat digitaalisen suotimen navat z_i ovat aidosti yksikköympyrän sisällä z-tasossa

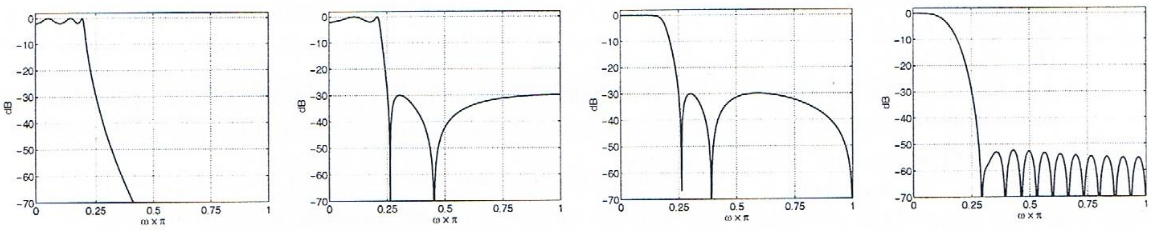
1.6 Komennolla `[B, A] = cheby2(5, 30, 0.25);` saadaan Chebychev II -tyyppinen digitaalinen suodin, jonka asteluku on $N = 5$, estokaistan minimivaimennus 30 desibeliä ja estokaistan rajataajuus $\omega_{\text{stop}} = 0.25\pi$. Suotimen magnitudivasteen kuvaaja on

(A) kuvassa 4(a)

(B) kuvassa 4(b)

(C) kuvassa 4(c)

(D) kuvassa 4(d)



Kuva 4: Monivalintatehtävän 1.6 magnitudivasteet (A) , (B) , (C) ja (D) .

1.7 Ideaalisen ylipäästösuotimen ($H_{\text{HP}}(z) = 1 - H_{\text{LP}}(z)$) impulssivaste on

$$\begin{aligned} h_{\text{d,HP}}[n] &= \delta[n] - h_{\text{d,LP}}[n] \\ &\approx \{\ldots, 0.0121, -0.1391, \underline{0.3}, -0.1391, 0.0121, \ldots\} \\ h_{\text{d,LP}}[n] &= (\omega_c/\pi) \cdot \text{sinc}(\omega_c n/\pi) \end{aligned}$$

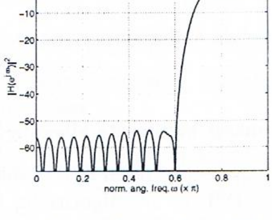
ja Hamming-ikkunafunktion arvot $w_{\text{Hamming}}[n] = \{0.08, 0.54, \underline{1}, 0.54, 0.08\}$. Toteutetaan suodin ikkunamenetelmällä ("window method") ja viivästetään suodin kausaaliseksi.

(A) Ylipäästösuotimen siirtofunktioksi tulee $H(z) = 0.08 + 0.54z^{-1} + z^{-2} + 0.54z^{-3} + 0.08z^{-4}$

(B) Ylipäästösuotimen vaihevaste on lineaarinen

(C) Ylipäästösuotimen rajataajuus on $\omega_c = 0.3\pi$

(D) Ylipäästösuotimen magnitudivaste $|H(e^{j\omega})|^2$ on kuvassa 5.



Kuva 5: Monivalintatehtävä 1.7: (D) $|H(e^{j\omega})|^2$

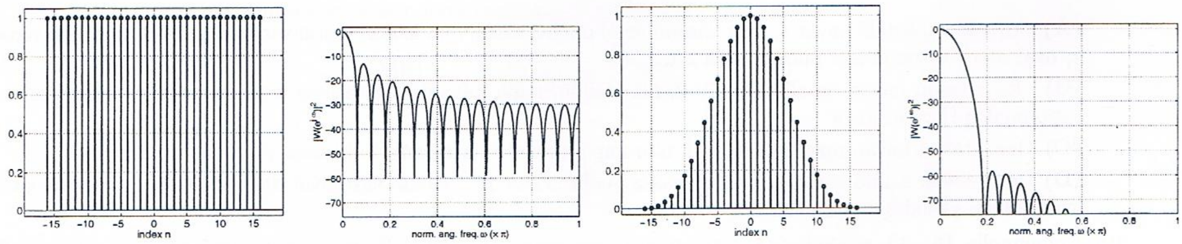
1.8 Sekvenssin katkaisuun äärellisen pituiseksi voidaan käyttää ikkunafunktiota. Kuvassa 6 on esitetty $N = 33$ ($M = 16$, $-M \leq n \leq M$) pituinen suorakulmainen ikkuna ja Blackman-ikkuna aika- ja taajuustasossa. Katkaisun jälkeen sekvenssistä lasketaan Fourier-muunnos spektrin aikaansaamiseksi.

(A) Blackman-ikkunan leveämpi pääkupu ("main lobe") huonontaa signaalin läheikkäin olevien taajuuskomponenttien erotuskykyä verrattuna suorakulmaiseen ikkunaan

(B) Blackman-ikkuna vaimentaa katkaistun sekvenssin $x[n]$ ensimmäisiä ja viimeisiä arvoja niin, etteivät amplitudiltaan heikot taajuuskomponentit erotu spektrissä yhtä hyvin kuin suorakulmaisella ikkunalla

(C) Blackman-ikkunan suurempi vaimennus sivukuvuissa ("side lobe") aiheuttaa sen, etteivät amplitudiltaan heikot taajuuskomponentit erotu spektrissä yhtä hyvin kuin suorakulmaisella ikkunalla

(D) Blackman-ikkuna muokkaa katkaistua sekvenssiä $x[n]$ niin, että sen taajuuskomponentit siirtyvät keskimäärin kaksi kertaa korkeammille taajuuksille kuin alkuperäisessä katkaisemattomassa signaalissa



Kuva 6: Monivalintatehtävä 1.8: (a) suorakulmainen ikkuna $w_r[n]$ ja (b) magnitudivaste $|W_r(e^{j\omega})|^2$, (c) Blackman-ikkuna $w_b[n]$ ja (d) magnitudivaste $|W_b(e^{j\omega})|^2$.

1.9 Jaksollinen lukujono ($N_0 = 6$) $x[n] = \{\ldots, 8, 3, 4, 2, 9, -1, \ldots\}$ laitetaan digitaalijärjestelmään $x[n] \rightarrow \boxed{\downarrow 2} \rightarrow \boxed{\uparrow 2} \rightarrow y[n]$. Mitä tulee ulos?

(A) sama jono $y[n] = x[n]$

(B) puolta lyhyempi jono $y[n]$

(C) $y[n] = \{\ldots, 8, 0, 4, 0, 9, 0, \ldots\}$

(D) $y[n] = 2x[n]$

1.10 Ajat Matlabissa itse kirjoittamaasi koodia ensimmäisen kerran makro- eli skriptitiedostosta `myFunc1.m`, jonka ensimmäiset rivit ovat:

```
1  [x, fT] = wavread('kiisseli.wav');
2  M       = length(x);
3  N       = 512;
4  overlap = 128;
5  D       = zeros(ceil(M/N), 3);
6  for k = (1 : N-overlap : M-N)
7      ind      = ind+1;
8      D(ind,1) = sum(abs(fft(x(k : k+N-1) .* hamming(N))));
```

Ajo keskeytyy virheilmoitukseen, joka tulee komentoikkunaan "Command window":

```
??? Undefined function or variable 'ind'.

Error in ==> myFunc1 at 7
    ind  = ind+1;
```

Mikä on parhain toimintaehdotus ongelmaan:

(A) Tallennat auki olevat tiedostot, lopetat Matlabin ja käynnistät sen uudelleen. Ajat `myFunc1.m` koodin uudestaan

(B) Syötät komentoikkunan riville komennon `ind = 0;` ja ajat koodin läpi

(C) Tuplaklikkaat komentoikkunan virheilmoitusta ja pääset editoriin kyseiselle riville 7. Poistat koko rivin 7, joka aiheutti virheilmoituksen

(D) Lisäät editorissa koodiin ennen riviä 6 alustuksen `ind = 0;`

2) (6p, **VÄLIKOE**) Kirjoita tenttiessee jommasta kummasta aiheesta 2A tai 2B.

2A) **VAIHTOEHTO A.** FFT-algoritmit. Yleisen selostuksen lisäksi voit käyttää esimerkkinä kirjassa/kalvoissa ja laskuharjoitusmateriaalissa esiteltyä "radix-2 DIT FFT" -algoritmia, jonka perhosyhtälöt ja W_N taulukossa. Laske välivaiheittain FFT-muunnos ainakin jonolle ($N = 4$) $x[n] = 5\delta[n] - 2\delta[n-1] - 4\delta[n-2] + \delta[n-3]$.

2B) **VAIHTOEHTO B.** Äärellisestä sananpituudesta aiheutuvien seurausten analysointi.

3) (6p, **VAIN TENTTI**) Tutkitaan kolmen LTI-järjestelmän sarjaankytkentää kuvassa 7. Tiedetään, että

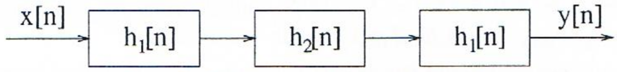
$$\begin{aligned} h_1[n] &= \delta[n-1] - \delta[n-2] \\ h_2[n] &= \delta[n+1] + 2\delta[n] - \delta[n-1] \end{aligned}$$

a) Mikä on koko suotimen $h[n]$ impulssivaste? Muista näyttää tarvittavat välivaiheet!

b) Kun ulostulona järjestelmästä $h[n]$ on sekvenssi

$$y[n] = -\delta[n+1] + 6\delta[n-1] - 4\delta[n-2] - 7\delta[n-3] + 8\delta[n-4] - 2\delta[n-5]$$

niin mikä on ollut syöte $x[n]$?



Kuva 7: Tehtävän 3 kaskaadikytkentä.

4) (6p, **VAIN TENTTI**) Olkoon tutkittavana digitaalinen LTI-suodin, jonka siirtofunktio on

$$H(z) = \frac{1 - 1.7z^{-1} + 0.72z^{-2}}{1 - 0.8z^{-1}}$$

a) Perustele, onko suodin FIR vai IIR.

b) Esitä suotimen napanollakuvaaja.

c) Hahmottele suotimen magnitudivaste. Onko kyseessä alipäästö / ylipäästö / kaistanpäästö / kaistanesto / kokopäästö ("allpass")?

d) Kirjoita suotimen differenssiyhtälö.

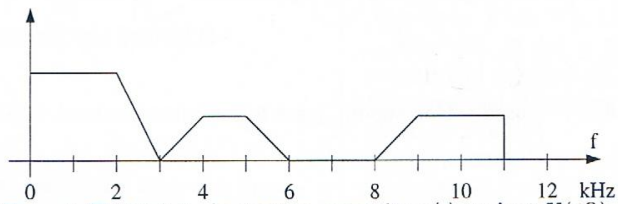
e) Perustele, onko suodin kausaalinen vai ei.

f) Kerro tai piirrä yksi ja vain yksi joku muu olennainen asia analysoitavasta suotimesta.

5) (6p, **VAIN TENTTI**) Tutkitaan analogisen signaalin $x(t)$ spektriä $X(j\Omega)$ kuvassa 8.

a) Mikä on Shannonin näytteenottoteoreeman tärkein sisältö?

b) Jos kuvan signaalia näytteistetään taajuudella $f_T = 9$ kHz, niin hahmottele näytteistetyn sekvenssin spektri $X(e^{j\omega})$.



Kuva 8: Tehtävä 5. Analogisen signaalin $x(t)$ spektri $X(j\Omega)$.

6) (6p, **VAIN TENTTI**) Tutkitaan toisen asteen LTI-suodinta, jonka siirtofunktio on

$$H_1(z) = \frac{1 - 1.2z^{-1} + z^{-2}}{1 + 1.5z^{-1} + 0.6z^{-2}}$$

jonka navat ovat $p = -0.75 \pm 0.1936j$ ja nollat $z = 0.6 \pm 0.8j$ sekä magnitudivasteen maksimi kohdassa $\omega = \pi$.

a) Hahmottele suotimen $H_1(z)$ magnitudivaste välille $[0, \ldots, 2\pi]$

b) Korvaa suotimen $H_1(z)$ viiverekisterit kaksinkertaisella viiveellä $H_2(z) = H_1(z^2)$ (vrt. ylösnäytteistys $L = 2$, "upsampling"). Anna suodin $H_2(z)$ muodossa

$$H_2(z) = K \cdot \frac{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3} + b_4 z^{-4}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + a_3 z^{-3} + a_4 z^{-4}}$$

ja hahmottele $H_2(z)$:n magnitudivaste välille $[0, \ldots, \pi]$.

c) Määrittele kerroin K niin, että suotimen $H_2(z)$ maksimiarvo on skaalattu ykköseksi.

6/8

7) (6p, **VAIN TENTTI**) Kuvassa 9 suotimen sisääntuloon tulevien arvojen bittimäärä on B. Kertolaskujen jälkeen määrä on $2B$. Jotta ulostulo saadaan jälleen B:n bitin suuruiseksi, joudutaan arvoa $w[n]$ kvantisoimaan (lohko Q).

Kvantisointivirhettä voidaan kompensoida ns. virheen takaisinkytkennän ("error feedback", "error-shaping filter") avulla. Kuvassa 9 on toisen asteen suodin, jossa mukana on toisen asteen virheen takaisinkytkentä.

Kirjoita ensin differenssiyhtälöt $e[n]$:lle ja $w[n]$:lle, ja kirjoita sitten taajuustasossa kvantisoitu ulostulo $Y(z)$ sisääntulon $X(z)$, sisääntuloa muokkaavan osan $H_x(z)$, kvantisointikohinan $E(z)$ ja kvantisointikohinaa muokkaavan osan $H_e(z)$ avulla muodossa

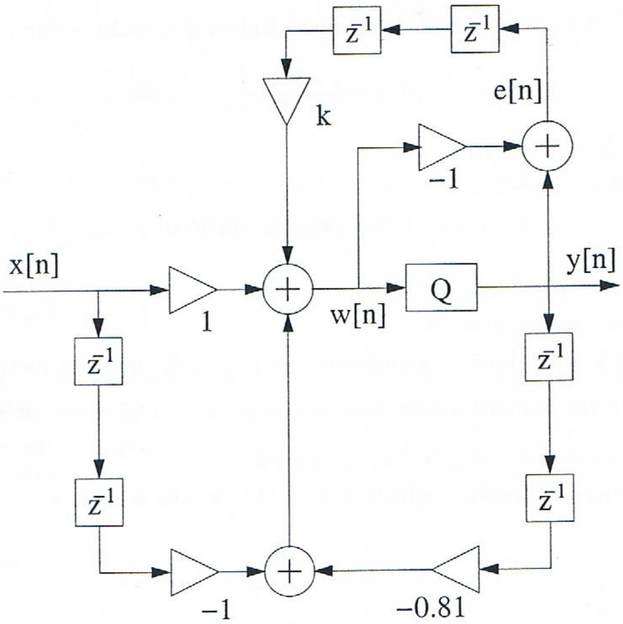
$$Y(z) = H_x(z)X(z) + H_e(z)E(z)$$

ja vastaa

a) kuinka suodin käyttäytyy, kun käytössä äärettömän pitkä sananpituus, ts. kvantisointia ei tapahdu ja $e[n] \equiv 0, \forall n$.

b) kuinka kohinan kokonaisspektri $E_{tot}(z) = H_e(z)E(z)$ muokkautuu, jos kompensointia ei käytetä, ts. $k = 0$, ja jos $e[n]$ on valkoista kohinaa eli että $E(z) = 1$ kaikilla taajuuksilla.

c) millä mahdollisimman yksinkertaisella k:n arvolla kohina saadaan siirrettyä varsinaisen suotimen estokaistalle, jossa sen merkitys on vähäisempi.



Kuva 9: Tehtävä 7. Toisen asteen suodin, jossa toisen asteen virheen takaisinkytkentä.

8) (1p, **VÄLIKOE JA TENTTI**)

Vastaa kaksiosaiseen kurssipalautteeseen ma 10.5. - pe 21.5.2010. Toinen kyselyistä on WebOodissa ja noudattelee tietotekniikan tutkinto-ohjelman yleistä kurssilomaketta ja toinen tarkentavia kysymyksiä sisältävä.

Kysely kuuluu osana välikoesuoritukseen ja sen arvo on +1 pistettä. Myös tenttiin osallistujat saavat +1 pistettä kyselyyn osallistumisesta.

T-61.3010 DSP Table of formulas, spring 2010

Disclaimer! Notations, e.g., ω or Ω, may vary from book to book, or from exam paper to other.

Basic math stuff

Even and odd functions:

$\mathcal{E}ven\{x(t)\} = 0.5 \cdot [x(t) + x(-t)]$, e.g., $\cos(x) = \cos(-x)$

$\mathcal{O}dd\{x(t)\} = 0.5 \cdot [x(t) - x(-t)]$, e.g., $\sin(x) = -\sin(-x)$

Roots of second-order polynomial:

$ax^2 + bx + c = 0,\ x = (-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac})/(2a)$

Logarithms, decibels:

$\log((A \cdot B/C)^D) = D \cdot (\log A + \log B - \log C)$

$\log_a b = \log_c b / \log_c a$

decibels: $10\log_{10}(H^2/H_0^2) = 20\log_{10}(H/H_0)$

$10\log_{10}(0.5) = 20\log_{10}(\sqrt{0.5}) \approx -3.01$ dB

$20\log_{10}(0.1) = -20$ dB, $20\log_{10}(0.01) = -40$ dB

Complex numbers, radii, angles, unit circle:

$i \equiv j = \sqrt{-1} = -1/j$

$z = x + jy = r\,e^{j\theta}$

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\theta = \arctan(y/x) + n\pi,\ \ (n = 0,\ \text{if } x > 0, n = 1,\ \text{if } x < 0)$

$x = r\,\cos(\theta),\ y = r\,\sin(\theta)$

$e^{j\theta} = \cos(\theta) + j\,\sin(\theta)$ (*Euler's formula*)

$\cos(\theta) = (1/2) \cdot (e^{j\theta} + e^{-j\theta}),\ \sin(\theta) = (1/2j) \cdot (e^{j\theta} - e^{-j\theta})$

$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 e^{j(\theta_1+\theta_2)},\ z_1/z_2 = (r_1/r_2)e^{j(\theta_1-\theta_2)}$

$|A \cdot B| = |A| \cdot |B|,\ \angle(A \cdot B) = \angle A + \angle B$

$z^n = r^n e^{jn\theta} = r^n(\cos\theta + j\sin\theta)^n = r^n(\cos n\theta + j\sin n\theta)$

$z_k = \sqrt[N]{z} = \sqrt[N]{r\,e^{j\theta}} = |\sqrt[N]{r}|\,e^{j(\theta+2\pi k)/N},\ k = 0, 1, \ldots, N-1$

Trigonometric functions:

$1° = \pi/180$ radians ≈ 0.01745 rad, 1 rad $= 180°/\pi \approx 57.30°$

$\text{sinc}(\theta) = \sin(\pi\theta)/(\pi\theta)$

$\sin(\theta)/\theta \to 1$, when $\theta \to 0$; $\text{sinc}(\theta) \to 1$, when $\theta \to 0$

$\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$

$\sin(\theta) = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \ldots + (-1)^n\frac{\theta^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots$ (Taylor)

$\cos(\theta) = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \ldots + (-1)^n\frac{\theta^{2n}}{(2n)!} + \ldots$ (Taylor)

θ	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$
$\sin(\theta)$	0	0.5	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$
$\cos(\theta)$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	0.5
θ	$\pi/2$	$3\pi/4$	π	$-\pi/2$
$\sin(\theta)$	1	$\sqrt{2}/2$	0	-1
$\cos(\theta)$	0	$-\sqrt{2}/2$	-1	0

$\pi \approx 3.1416,\ \sqrt{3}/2 \approx 0.8660,\ \sqrt{2}/2 \approx 0.7071$

Geometric series:

$\sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \frac{1}{1-a},\quad |a| < 1$

$\sum_{n=0}^{N} a^n = \frac{1-a^{N+1}}{1-a},\quad |a| < 1$

Continuous-time unit step and unit impulse fun.:

$$\mu(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

$\delta_\Delta(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mu_\Delta(t),\quad \delta(t) = \lim_{\Delta\to 0}\delta_\Delta(t)$ (Dirac's delta)

$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,\mathrm{d}t = 1$

$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0)x(t)\,\mathrm{d}t = x(t_0)$

In DSP notation $2\pi\delta(t)$ is computed $2\pi\int\delta(t)\cdot 1\,\mathrm{d}t = 2\pi$, when $t = 0$, and $= 0$ elsewhere.

Discrete-time unit impulse and unit step functions:

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases} \qquad \mu[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

E.g. $x[n] = 2\delta[n+1] + \delta[n] - \delta[n-1] = \{2, \underline{1}, -1\}$, $x[-1] = 2,\ x[0] = 1,\ x[1] = -1$.

Periodic signals

$\exists T \in \mathbb{R}_+ : x(t) = x(t+T), \forall t \in \mathbb{R}$

$\exists N \in \mathbb{Z}_+ : x[n] = x[n+N], \forall n \in \mathbb{Z}$

Fundamental period T_0, N_0 is the smallest $T > 0$, $N > 0$.

E.g.: $\cos(\omega n) = \cos(\omega n + 2\pi k)$, $e^{j(\omega n)} = e^{j(\omega n + 2\pi k)}$

Convolution

Convolution is commutative, associative and distributive.

$y(t) = h(t) \circledast x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$

$y[n] = h[n] \circledast x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]x[n-k]$

$y_C[n] = h[n] Ⓝ\, x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} h[k]x[< n-k >_N]$

Correlation:

$r_{xy}[l] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]y[n-l] = x[l] \circledast y[-l]$

$r_{xx}[l] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]x[n-l]$

Mean and variance of random signal:

$m_X = \mathrm{E}[X] = \int x p_X(x)dx$

$\sigma_X^2 = \int (x - m_X)^2 p_X(x)dx = \mathrm{E}[X^2] - m_X^2$

Frequencies, angular frequencies, periods:

Here f_s (also f_T later) is the sampling frequency.

Frequency f, $[f] = \text{Hz} = 1/\text{s}$.

Angular frequency $\Omega = 2\pi f = 2\pi/T$, $[\Omega] = \text{rad/s}$ (analog).

Normalized angular frequency $\omega = 2\pi\Omega/\Omega_s = 2\pi f/f_s$, $[\omega] =$ rad/sample (digital).

Normalized frequency in Matlab $f_{MATLAB} = 2f/f_s$, $[f_{MATLAB}] = 1/\text{sample}$.

Sampling of $x_a(t)$ by sampling frequency f_T

$x_p[n] = x_a(nT) = x_a(n/f_T)$

$X_p(j\Omega) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(j(\Omega - k\Omega_T))$

Integral transforms. Properties

Here all integral transforms share some basic properties. Examples given with CTFT, $x[n] \leftrightarrow X(e^{j\omega})$, $x_1[n] \leftrightarrow X_1(e^{j\omega})$, and $x_2[n] \leftrightarrow X_2(e^{j\omega})$ are time-domain signals with corresponding transform-domain spectra. a and b are constants.

Linearity. All transforms are linear.

$ax_1[n] + bx_2[n] \leftrightarrow aX_1(e^{j\omega}) + bX_2(e^{j\omega})$

Time-shifting. There is a kernel term in transform, e.g.,

$x[n-k] \leftrightarrow e^{-jk\omega}X(e^{j\omega})$

Frequency-shifting. There is a kernel term in signal e.g.,

$e^{j\omega_k n}x[n] \leftrightarrow X(e^{j(\omega-\omega_k)})$

Conjugate symmetry $x^*[n] \leftrightarrow X^*(e^{-j\omega})$. If $x[n] \in \mathbb{R}$, then $X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega})$, $|X(e^{j\omega})| = |X(e^{-j\omega})|$, $\angle X(e^{j\omega}) = -\angle X(e^{-j\omega})$. If $x[n] \in \mathbb{R}$ and even, then $X(e^{j\omega}) \in \mathbb{R}$ and even. If $x[n] \in \mathbb{R}$ and odd, then $X(e^{j\omega})$ purely $\in \mathbb{C}$ and odd.

Time reversal. Transform variable is reversed, e.g.,

$x[-n] \leftrightarrow X(e^{-j\omega})$

Differentiation. In time and frequency domain, e.g.,

$x[n] - x[n-1] \leftrightarrow (1 - e^{-j\omega})X(e^{j\omega})$, $nx[n] \leftrightarrow j\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}X(e^{j\omega})$

Duality. Convolution property: convolution in time domain corresponds multiplication in transform domain $x_1[n] \circledast x_2[n] \leftrightarrow X_1(e^{j\omega}) \cdot X_2(e^{j\omega})$ and multipication property, vice versa, $x_1[n] \cdot x_2[n] \leftrightarrow \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X_1(e^{j\theta})X_2(e^{j(\omega-\theta)})\,\mathrm{d}\theta$

Parseval's relation. Energy in signal and spectral components: $\sum |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} |X(e^{j\omega})|^2\,\mathrm{d}\omega$

Fourier series of continuous-time periodic signals:

$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\,e^{jk\Omega_0 t}$ (synthesis)

$a_k = \frac{1}{T}\int_T x(t)\,e^{-jk\Omega_0 t}\,\mathrm{d}t$ (analysis)

$x(t - t_0) \leftrightarrow a_k e^{jk\Omega_0 t_0}$

$e^{jM\Omega_0 t}x(t) \leftrightarrow a_{k-M}$

$\int_T x_a(\tau)x_b(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau \leftrightarrow Ta_k b_k$

$x_a(t)x_b(t) \leftrightarrow \sum_l a_l b_{k-l}$

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) \leftrightarrow jk\Omega_0 a_k$

Continuous-time Fourier-transform (CTFT):

$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\Omega)\,e^{j\Omega t}\,\mathrm{d}\Omega$ (synthesis)

$X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,e^{-j\Omega t}\,\mathrm{d}t$ (analysis)

$x(t - t_k) \leftrightarrow e^{j\Omega t_k}X(j\Omega)$

5/8

$e^{j\Omega_k t}x(t) \leftrightarrow X(j(\Omega-\Omega_k))$
$x_a(t) \circledast x_b(t) \leftrightarrow X_a(j\Omega)X_b(j\Omega)$
$x_a(t)x_b(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi}X_a(j\Omega) \circledast X_b(j\Omega)$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) \leftrightarrow j\Omega X(j\Omega)$
$tx(t) \leftrightarrow j\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\Omega}X(j\Omega)$
$e^{j\Omega_0 t} \leftrightarrow 2\pi\delta(\Omega-\Omega_0)$
$\cos(\Omega_0 t) \leftrightarrow \pi[\delta(\Omega-\Omega_0)+\delta(\Omega+\Omega_0)]$
$\sin(\Omega_0 t) \leftrightarrow j\pi[\delta(\Omega+\Omega_0)-\delta(\Omega-\Omega_0)]$
$x(t)=1 \leftrightarrow 2\pi\delta(\Omega)$
$x(t)=\begin{cases}1, |t|<T_1\\0, |t|>T_1\end{cases} \leftrightarrow \frac{2\sin(\Omega T_1)}{\Omega}$
$\frac{\sin(Wt)}{\pi t} \leftrightarrow X(j\Omega)=\begin{cases}1, |\Omega|<W\\0, |\Omega|>W\end{cases}$
$\delta(t) \leftrightarrow 1$
$\delta(t-t_k) \leftrightarrow e^{j\Omega t_k}$
$e^{-at}\mu(t) \leftrightarrow \frac{1}{a+j\Omega}$, where $\mathcal{R}eal\{a\}>0$

Discrete-time Fourier-transform (DTFT):
$x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X(e^{j\omega})\,e^{j\omega n}\,\mathrm{d}\omega$ (synthesis)
$X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]\,e^{-j\omega n}$, periodic with 2π (analysis)
$x[n-k] \leftrightarrow e^{-jk\omega}X(e^{j\omega})$
$e^{j\omega_k n}x[n] \leftrightarrow X(e^{j(\omega-\omega_k)})$
$x_1[n] \circledast x_2[n] \leftrightarrow X_1(e^{j\omega})\cdot X_2(e^{j\omega})$
$x_1[n]\cdot x_2[n] \leftrightarrow \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X_1(e^{j\theta})X_2(e^{j(\omega-\theta)})\,\mathrm{d}\theta$
$nx[n] \leftrightarrow j\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}X(e^{j\omega})$
$e^{j\omega_0 n} \leftrightarrow 2\pi\sum_l \delta(\omega-\omega_0-2\pi l)$
$\cos(\omega_0 n) \leftrightarrow \pi\sum_l[\delta(\omega-\omega_0-2\pi l)+\delta(\omega+\omega_0-2\pi l)]$
$\sin(\omega_0 n) \leftrightarrow j\pi\sum_l[\delta(\omega+\omega_0-2\pi l)-\delta(\omega-\omega_0-2\pi l)]$
$x[n]=1 \leftrightarrow 2\pi\sum_l\delta(\omega-2\pi l)$
$x[n]=\begin{cases}1, |n|\le N_1\\0, |n|>N_1\end{cases} \leftrightarrow \frac{\sin(\omega(N_1+0.5))}{\sin(\omega/2)}$
$\frac{\sin(Wn)}{\pi n}=\frac{W}{\pi}\mathrm{sinc}(\frac{Wn}{\pi}) \leftrightarrow X(e^{j\omega})=\begin{cases}1, & 0\le|\omega|\le W\\0, & W<|\omega|\le\pi\end{cases}$
$\delta[n] \leftrightarrow 1$
$\delta[n-k] \leftrightarrow e^{-jk\omega}$
$a^n\mu[n] \leftrightarrow \frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$, $|a|<1$

***N*-point Discrete Fourier-transform (DFT):**
Connection to DTFT: $X[k]=X(e^{j\omega})|_{\omega=2\pi k/N}$
$W_N=e^{-j2\pi/N}$
$x[n]=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X[k]W_N^{-kn}$, $0\le n\le N-1$ (synthesis)
$X[k]=\sum_{n=0}^{N-1}x[n]W_N^{kn}$, $0\le k\le N-1$ (analysis)
$x[<n-n_0>_N] \leftrightarrow W_N^{-kn_0}X[k]$
$W_N^{-nk_0}x[n] \leftrightarrow X[<k-k_0>_N]$
$y_C[n]=h[n] Ⓝ x[n] \leftrightarrow H[k]\cdot X[k]=Y[k]$

Laplace transform:
Convergence with a certain ROC (region of convergence).
Connection to continuous-time Fourier-transform: $s=j\Omega$
$x(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}X(s)e^{st}\,\mathrm{d}s$ (synthesis)
$X(s)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\,e^{-st}\,\mathrm{d}t$ (analysis)

***z*-transform:**
Convergence with a certain ROC (region of convergence).
Connection to discrete-time Fourier-transform: $z=e^{j\omega}$
$x[n]=\frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z)z^{n-1}\mathrm{d}z$, C in ROC of $X(z)$ (synthesis)
$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]z^{-n}$ (analysis)
$x[n-k] \leftrightarrow z^{-k}X(z)$
$x_1[n] \circledast x_2[n] \leftrightarrow X_1(z)\cdot X_2(z)$
$\delta[n] \leftrightarrow 1$, ROC all z
$\delta[n-k] \leftrightarrow z^{-k}$, all z, except 0 ($k>0$) or ∞ ($k<0$)
$\mu[n] \leftrightarrow \frac{1}{1-z^{-1}}$, $|z|>1$
$-\mu[-n-1] \leftrightarrow \frac{1}{1-z^{-1}}$, $|z|<1$
$a^n\mu[n] \leftrightarrow \frac{1}{1-az^{-1}}$, $|z|>|a|$
$na^n\mu[n] \leftrightarrow \frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$, $|z|>|a|$
$(n+1)a^n\mu[n] \leftrightarrow \frac{1}{(1-az^{-1})^2}$, $|z|>|a|$
$r^n\cos(\omega_0 n)\mu[n] \leftrightarrow \frac{1-r\cos(\omega_0)z^{-1}}{1-2r\cos(\omega_0)z^{-1}+r^2z^{-2}}$, $|z|>|r|$
$r^n\sin(\omega_0 n)\mu[n] \leftrightarrow \frac{r\sin(\omega_0)z^{-1}}{1-2r\cos(\omega_0)z^{-1}+r^2z^{-2}}$, $|z|>|r|$

LTI filter analysis
Stability $\sum_n|h[n]|<\infty$; unit cirle belongs to ROC
Causality $h[n]=0, n<0$; ∞ belongs to ROC
Unit step response $s[n]=\sum_{k=-\infty}^{n}h[k]$
Causal transfer function of order $\max\{M,N\}$:
$H(z)=B(z)/A(z)=K\cdot\frac{\sum_{m=0}^{M}b_mz^{-m}}{\sum_{n=0}^{N}a_nz^{-n}}=G\cdot\frac{\prod_{m=1}^{M}(1-d_mz^{-1})}{\prod_{n=1}^{N}(1-p_nz^{-1})}$
Zeros d_m: $B(z)=0$; *Poles* p_n: $A(z)=0$
Frequency, magnitude/amplitude, phase response, $z\leftarrow e^{j\omega}$
$H(e^{j\omega})=|H(e^{j\omega})|\,e^{j\angle H(e^{j\omega})}$
$H(e^{j\omega})=H(z)|_{z=e^{j\omega}}$
$H[k]=H(e^{j\omega})|_{\omega=2\pi k/N}$
Group delay $\tau(\omega)=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\angle H(e^{j\omega})$
Four types of linear-phase FIR filters, $h[n]=h[N-1-n]$ (even/odd symmetric), or $h[n]=-h[N-1-n]$ (e/o antis.).
Zeros symmetric w.r.t. unit circle: $r\,e^{\pm j\theta}$ and $(1/r)\,e^{\mp j\theta}$.
Important *transform pairs and properties*:
$a\,\delta[n-k] \leftrightarrow a\,e^{-jk\omega} \leftrightarrow a\,z^{-k}$
$a^n\mu[n] \leftrightarrow 1/[1-a\,e^{-j\omega}] \leftrightarrow 1/[1-a\,z^{-1}]$
$h[n]=\sum_i(k_i\cdot a_i^n\mu[n]) \leftrightarrow H(e^{j\omega})=\ldots$
$\ldots\sum_i(k_i/[1-a_i\,e^{-j\omega}]) \leftrightarrow H(z)=\sum_i(k_i/[1-a_i\,z^{-1}])$
$a\,x[n-k] \leftrightarrow a\,e^{-jk\omega}X(e^{j\omega}) \leftrightarrow a\,z^{-k}X(z)$
$y[n]=h[n]\circledast x[n] \leftrightarrow Y(z)=H(z)\cdot X(z)$
rectangle $\leftrightarrow$ sinc, sinc $\leftrightarrow$ rectangle

LTI filter design (synthesis)
Bilinear transform $H(z)=H(s)|_s$ and *prewarping*
$s=k\cdot(1-z^{-1})/(1+z^{-1})$, $k=1$ or $k=2/T=2f_T$
$\Omega_{prewarp,c}=k\cdot\tan(\omega_c/2)$, $k=1$ or $k=2/T=2f_T$
Spectral transformations, $\hat{\omega}_c$ desired cut-off
LP-LP $z^{-1}=(\hat{z}^{-1}-\alpha)/(1-\alpha\hat{z}^{-1})$, where
$\alpha=\sin(0.5(\omega_c-\hat{\omega}_c))/\sin(0.5(\omega_c+\hat{\omega}_c))$
LP-HP $z^{-1}=-(\hat{z}^{-1}+\alpha)/(1+\alpha\hat{z}^{-1})$, where
$\alpha=-\cos(0.5(\omega_c+\hat{\omega}_c))/\cos(0.5(\omega_c-\hat{\omega}_c))$
Windowed Fourier series method
$H(e^{j\omega})=\begin{cases}1, & |\omega|<\omega_c\\0, & |\omega|\ge\omega_c\end{cases} \leftrightarrow h[n]=\frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n}=\frac{\omega_c}{\pi}\mathrm{sinc}(\frac{\omega_c n}{\pi})$
$h_{FIR}[n]=h_{ideal}[n]\cdot w[n]$
$H_{FIR}(e^{j\omega})=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}H_{ideal}(e^{j\theta})W(e^{j(\omega-\theta)})\,\mathrm{d}\theta$
Fixed window functions, order $N=2M$, $-M\le n\le M$:
Rectangular $w[n]=1$
Hamming $w[n]=0.54+0.46\cos((2\pi n)/(2M))$
Hann $w[n]=0.5\cdot(1+\cos((2\pi n)/(2M)))$
Blackman $w[n]=0.42+0.5\cos(\frac{2\pi n}{2M})+0.08\cos(\frac{4\pi n}{2M})$
Bartlett $w[n]=1-(|n|/M)$

Implementation
Radix-2 DIT N-FFT butterfly equations, $L\{x[n]\}=N$
$\begin{cases}\Psi_{r+1}[\alpha] &= \Psi_r[\alpha]+W_{N_r}^l\Psi_r[\beta]\\\Psi_{r+1}[\beta] &= \Psi_r[\alpha]-W_{N_r}^l\Psi_r[\beta]\end{cases}$
Inputs $x[n]$ in bit-reversed order in Ψ_1, outputs in Ψ_R, $R=\log_2 N+1$; levels $\Psi_1,\ldots,\Psi_R$, $r\in[1,R-1]$; multipliers $W_{N_r}=e^{-j2\pi/N_r}$, $N_r=2^r$, $l\in[0,2^{r-1}-1]$.

Multirate systems
Upsampling (interpolation) with factor L, $\boxed{\uparrow L}$
$x_u[n]=\begin{cases}x[n/L], n=0,\pm L,\pm 2L,\ldots\\x_u[n]=0, \text{ otherwise}\end{cases}$
$X_u(z)=X(z^L)$, $X_u(e^{j\omega})=X(e^{j\omega L})$
Downsampling (decimation) with factor M, $\boxed{\downarrow M}$
$x_d[n]=x[nM]$
$X_d(z)=(1/M)\sum_{k=0}^{M-1}X(z^{1/M}W_M^{-k})$,
$X_d(e^{j\omega})=(1/M)\sum_{k=0}^{M-1}X(e^{j(\omega-2\pi k)/M})$