Rak-54.116 Rakenteiden mekaniikka C, RM C (4 ov)
Tentti 30.8.2007

Kirjoita jokaiseen koepaperiin selvästi
- koko nimesi, puhuttelunimi alleviivattuna
- osasto, vuosikurssi, tentin päivämäärä sekä tentittävä opintojakso koodeineen
- opiskelijanumero, mukaan lukien tarkistuskirjain
- monettako kertaa olet opintojaksoa suorittamassa
- minä vuonna olet suorittanut pakolliset harjoitustehtävät

1) Suoran sauvan yleinen yksidimensioinen kinematiikka määritellään yhtälöllä

$$\mathbf{u}(s,y) = u(s,y)\mathbf{e}_s + v(s,y)\mathbf{e}_y\,, \quad u(s,y) = \sum_{i=0}^{N} y^i u_i(s)\,, \quad v(s,y) = \sum_{i=0}^{N} y^i v_i(s)$$

sekä s on sauvan keskipinnan suuntainen koordinaatti ja y on sauvan keskipinnan normaalin suuntainen koordinaatti.

a) Miten kinematiikan lauseketta tulee modifioida, jos sauva otaksutaan kokoonpuristumattomaksi normaalinsa suunnassa.

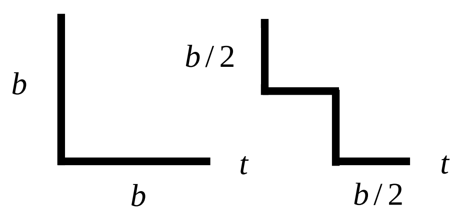
b) Miten kinematiikka edelleen yksinkertaistuu, jos vielä a-kohdan oletuksen lisäksi sauvan poikkileikkaustasojen oletetaan pysyvän tasoina muodonmuutoksessa.

c) Johda tasapainoyhtälöt ja reunaehdot virtuaalisen työn periaatteella päistään jäykästi kiinnitetyn sauvan jännitysresultanteille eli momentille M ja leikkausvoimalle Q, kun oletetaan, että kinematiikka on yksinkertaista muotoa $u(s,y) = yu_1(s)$ ja $v(s,y) = v_0(s)$ sekä sauvan jakaantunut kuorma on $q(s,y)$ ja pituus L.

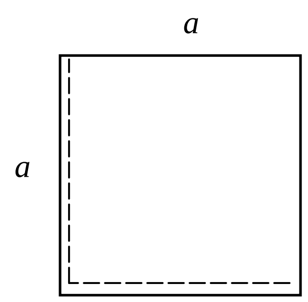
2) Määritä vääntöjäyhyys I_t ja leikkaus- eli vääntökeskiön asema seuraaville poikkileikkauksille:

a) L-poikkileikkauksinen sauva, jonka molempien laippojen pituus on b ja paksuus t;

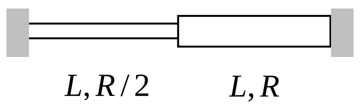
b) sauva, jonka poikkileikkaus koostuu kahdesta L-poikkileikkauksesta, joiden laippojen pituus on $b/2$ ja paksuus t.



3) Neliölaatta, jonka sivumitta on a, paksuus t ja taivutusjäykkyys $D = Et^3/[12(1-\nu^2)]$, on kahdelta vierekkäiseltä sivultaan vapaasti tuettu kun taas toiset kaksi sivua ovat vapaat. Laatta lepää kimmoisella alustalla, joka kohdistaa laattaan paineen $p(x,y) = kw(x,y)$, missä k on alustan kimmoisuusvakio ja w laatan taipuma. Laattaa kuormittaa tasaisesti jakaantunut kuorma $q(x,y) = q$. Laske arvio laatan maksimitaipumalle käyttämällä Kirchhoffin laattamallia ja potentiaalienergian minimin periaatetta sekä soveltuvaa taipuman yritefunktiota.



4) Rakenne, jonka poikkileikkaus on ympyrä, koostuu kahdesta eri paksuisesta yhtä pitkästä sauvasta, joiden molempien pituus on L, paksumman säde on R ja ohuemman säde $R/2$. Sauvojen tiheys on ρ ja kimmokerroin E. Herätevoima hetkellä t on $f(t)$.
Kirjoita rakenteen aksiaalivärähtelyn differentiaaliyhtälö olettamalla, että rakenne on molemmista päistään jäykästi tuettu ja kummankin sauvan massa keskitetään yhtä suuriksi pistemassoiksi sauvan molempiin päihin. Määritä lisäksi rakenteen alin ominaiskulmataajuus.



Rak-54.116 Rakenteiden mekaniikka C, RM C (4ov)
Kaavakokoelma tenttiin 30.8.2007

Lisää peruskaavoja kaavakokoelmissa RM-A ja RM-B.

Muodonmuutokset kaksidimensioisessa tapauksessa

$$\varepsilon_s = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial s} \cdot \mathbf{e}_s, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \cdot \mathbf{e}_y, \quad \gamma_{sy} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial s} \cdot \mathbf{e}_y + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \cdot \mathbf{e}_s$$

Sisäinen virtuaalinen työ

$$\delta W_s = -\int_V \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \boldsymbol{\varepsilon} \, dV$$

Ulkoinen virtuaalinen työ

$$\delta W_u = \int_V \mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{u} \, dV + \int_{S_T} \bar{\mathbf{T}} \cdot \delta \mathbf{u} \, ds$$

Virtuaalisen työn periaate

$$\delta W_s + \delta W_u = 0$$

Sauvan jännitysresultantit: momentit, normaalivoima ja leikkausvoimat

$$M_i(s) := \int_A \sigma_s(s,y) y^i dA, \qquad N(s) := M_0(s) := \int_A \sigma_s(s,y) dA, \qquad Q_i(s) := \int_A \tau_{sy}(s,y) y^i dA$$

Vääntöjäyhyys umpinaiselle, reiälliselle, moniosaiselle ohuelle suorakaiteelle sekä yksi- ja monikoteloiselle sauvalle

$$I_t = I_p + \int_A \left(y \frac{\partial \psi}{\partial z} - z \frac{\partial \psi}{\partial y}\right) dA$$

$$I_t = \frac{2}{G\theta}\left(HA_r + \int_A \Phi \, dA\right)$$

$$I_t = \frac{M_t}{G\theta}, \quad I_t = 2\int_A \Phi \, dA = 2\int_A w \, dA, \quad I_t \approx \frac{1}{3}\sum_i b_i t_i^3$$

$$I_t = \frac{4A^2}{\oint_C \frac{ds}{t}} + \frac{1}{3}\oint_C t^3 \, ds \approx \frac{4A^2}{\oint_C \frac{ds}{t}}, \quad I_t = \frac{2}{G\theta}\sum_i q_i A_i$$

Sektoriaalinen koordinaatti pisteen B suhteen

$$\omega_B = \pm \int_{P_0}^{P} h_B \, ds = -\int_{P_0}^{P} [(z - z_B)dy - (y - y_B)dz]$$

Sektoriaaliset tulomomentit

$$I_{\omega_B y} = \int_A \omega_B y \, dA, \quad I_{\omega_B z} = \int_A \omega_B z \, dA$$

Jäyhyysmomentit

$$I_y = \int_A z^2 \, dA, \quad I_z = \int_A y^2 \, dA, \quad I_{yz} = \int_A zy \, dA$$

KÄÄNNÄ!

Vääntö- eli leikkauskeskiö C

$$y_C = y_B + \frac{I_z I_{\omega_B z} - I_{yz} I_{\omega_B y}}{I_y I_z - I_{yz}^2} = y_B + \frac{I_{\omega_B z}}{I_y}; \quad jos\ I_{yz} = 0$$

$$z_C = z_B - \frac{I_y I_{\omega_B y} - I_{yz} I_{\omega_B z}}{I_y I_z - I_{yz}^2} = z_B - \frac{I_{\omega_B y}}{I_z}; \quad jos\ I_{yz} = 0$$

Sektoriaalinen staattinen momentti vääntökeskiön sektoriaaliselle koordinaatille

$$S_{\hat{\omega}_C} = \int_A \hat{\omega}_C \, dA,$$

Normeerattu vääntökeskiön sektoriaalinen koordinaatti

$$\omega_C = \hat{\omega}_C - \frac{S_{\hat{\omega}_C}}{A}$$

Sektoriaalinen staattinen momentti

$$S_{\omega_C}(s) = \int_0^s \omega_C(s)\, t \, ds$$

Sektoriaalinen vääntöjäyhyys eli käyristymisjäyhyys

$$I_\omega = \int_A \omega_C^2 \, dA$$

Potentiaalienergia

$$\Pi = U + V$$

Muodonmuutosenergia

$$U = \frac{1}{2}\int_V \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \, dV$$

Ulkoisen kuormituksen potentiaali

$$V = -\int_V \mathbf{F} \cdot \mathbf{u} \, dV - \int_{S_T} \bar{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{u} \, ds$$

Kirchhoff-laatan muodonmuutosenergia

$$U = \frac{1}{2}\int_A \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\kappa} \, dA = \frac{D}{2}\int_A \{(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2})^2 - 2(1-\nu)[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - (\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y})^2]\} \, dA$$

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$$

Sauvan muodonmuutosenergia taivutus-, leikkaus-, puristus- ja vääntötapauksessa

$$U = \frac{1}{2}\int_0^L \{EI\kappa^2 + \frac{GA}{\zeta}\gamma_{xy}^2 + EA\varepsilon_x^2 + GI_t\varphi_t^2\} \, dx$$

Jousivoima ja jousen muodonmuutosenergia

$$F = kx, \qquad U = \frac{1}{2}kx^2$$

Yksivapausteisen jousi–massa-systeemin vapaan värähtelyn differentiaaliyhtälö, yleinen ratkaisu ja ominaiskulmataajuus

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = 0, \qquad x(t) = C_1 \sin(\omega t) + C_2 \cos(\omega t), \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Lisää peruskaavoja kaavakokoelmissa RM-A ja RM-B.

Rak-54.116 Rakenteiden mekaniikka C, RM C (4 ov)

Ratkaisut tenttiin 30.8.2007
[suluissa pisteytys]

1. Tehtävä:

(a) Kokoonpuristumattomuus normaalin suunnassa eli y-suunnassa tarkoittaa, että $\varepsilon_y = 0$.
Nyt kun siirtymä on muotoa $\mathbf{u}(s,y) = u(s,y)\mathbf{e}_s + v(s,y)\mathbf{e}_y$, tämä ehto saa muodon

$$0 = \varepsilon_y = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \cdot \mathbf{e}_y = \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \left[u(s,y)\mathbf{e}_s + v(s,y)\mathbf{e}_y \right] \right\} \cdot \mathbf{e}_y$$
$$= \frac{\partial v(s,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \sum_{i=0}^{N} y^i v_i(s)$$
$$= \frac{\partial}{\partial y} \left\{ v_0(s) + y v_1(s) + y^2 v_2(s) + \mathsf{L} \right\}$$
$$= 0 + v_1(s) + 2 y v_2(s) + \mathsf{L}$$

joka toteutuu, jos $v_1(s) + 2yv_2(s) + \mathsf{L} = 0$ eli $v_i(s) = 0$ kaikilla $i = 1, 2, \ldots$. Tämä taas tarkoittaa sitä, että funktion v sarjasta otetaan mukaan vain ensimmäinen termi eli $N = 0$:

$v(s,y) = \sum_{i=0}^{0} y^i v_i(s) = v_0(s)$. **[1 p.]**

(b) Jotta poikkileikkaustasot pysyisivät tasoina (suorina), akselin suuntaisen siirtymäkomponentin $u(s,y)$ on riiputtava ainoastaan lineaarisesti koordinaatista y, koska korkeamman asteen y-riippuvuus sallii poikkileikkaustason käyristymisen muodonmuutoksessa. Funktion u sarjasta otetaan siis mukaan vain kaksi ensimmäistä termiä, jolloin $u(s,y) = u_0(s) + y u_1(s)$. **[1 p.]** Tällöin $u_1(s)$ voidaan tulkita poikkileikkaustason kallistumiskulmaksi (tai sen siniksi).

(c) Muodonmuutokset ovat nyt

$$\varepsilon_s = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial s} \cdot \mathbf{e}_s = \frac{\partial u}{\partial s} = y u_1{}'(s)$$
$$\varepsilon_y = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \cdot \mathbf{e}_y = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$
$$\gamma_{sy} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial s} \cdot \mathbf{e}_y + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \cdot \mathbf{e}_s = \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y} = v_0{}'(s) + u_1(s).$$

Sisäinen virtuaalinen työ on muotoa

$$\delta W_s = -\int_V \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \boldsymbol{\varepsilon}\, dV = -\int_V (\sigma_s \delta\varepsilon_s + \sigma_y \delta\varepsilon_y + \tau_{sy} \delta\gamma_{sy}) dV$$
$$= -\int_L \int_A \left\{ \sigma_s \delta(y u_1{}') + \tau_{sy} \delta(v_0{}' + u_1) \right\} dA dL$$
$$= -\int_L \left\{ \int_A \sigma_s(s,y) y dA\, \delta u_1{}'(s) + \int_A \tau_{sy}(s,y) dA\, (\delta v_0{}' + \delta u_1)(s) \right\} ds$$
$$=: -\int_L \left\{ M_1\, \delta u_1{}' + Q_0 \delta v_0{}' + Q_0 \delta u_1 \right\} ds$$

missä momentti määritellään lausekkeella $M(s) := M_1(s) := \int_A \sigma_s(s,y) y dA$ ja leikkausvoima on vastaavasti muotoa $Q(s) := Q_0(s) := \int_A \tau_{sy}(s,y) dA$. **[1 p.]**

Ulkoinen virtuaalinen työ voidaan lausua muodossa

$$\delta W_u = \int_V \mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{u} \, dV + \int_{S_T} \bar{\mathbf{T}} \cdot \delta \mathbf{u} \, ds$$

$$= \int_L \int_A q(s,y) \delta v(s,y) \, dA ds$$

$$= \int_L \delta v_0(s) \int_A q(s,y) \, dA ds$$

$$= \int_L \delta v_0 F \, ds$$

missä kuormaresultantti on $F(s) := \int_A q(s,y) \, dA$.

Virtuaalisen työn periaatteen mukaan $\delta W_s + \delta W_u = 0$, joten

$$-\int_L \{ M_1 \, \delta u_1' + Q_0 \delta v_0' + Q_0 \delta u_1 \} ds + \int_L \delta v_0 F \, ds = 0 \text{ . } \mathbf{[1\ p.]}$$

Osittaisintegroimalla saadaan

$$\int_L \{ -M_1' \, \delta u_1 - Q_0' \delta v_0 + Q_0 \delta u_1 \} ds + \left[M_1 \delta u_1 \right]_L + \left[Q_0 \delta v_0 \right]_L = \int_L \delta v_0 F \, ds$$

joka pätee kaikilla variaatioilla δu_1 ja δv_0, mistä seuraavat tasapainoyhtälöt

$$-M_1' + Q_0 = 0$$

$$-Q_0' = F$$

sekä jäykästi kiinnitetyn (tai vapaan) reunan reunaehdot

$\delta u_1 = 0$ (tai $M_1 = 0$), kun $s = 0, L$

$\delta v_0 = 0$ (tai $Q_0 = 0$), kun $s = 0, L$. **[1 p.]**

2. Tehtävä:

(a) L-profiilin **vääntöjäyhyys:**

$I_t \approx \frac{1}{3}\sum_i b_i t_i^3 = \frac{1}{3} 2bt^3 = \frac{2}{3} bt^3$. **[1/2 p.]**

Vääntökeskiö: Asetetaan napapiste B profiilin nurkkaan, jolloin koko profiililla sektoriaaliselle koordinaatille pätee

$$\omega_B = \pm\int_{P_0}^{P} h_B \, ds = -\int_{P_0}^{P} [(z - z_B)dy - (y - y_B)dz] = 0 .$$

Näin siis $I_{\omega_B z} = \int_A \omega_B z \, dA = 0 = \int_A \omega_B y \, dA = I_{\omega_B y}$, jolloin

$$y_C = y_B + \frac{I_z I_{\omega_B z} - I_{yz} I_{\omega_B y}}{I_y I_z - I_{yz}^2} = y_B$$

$$z_C = z_B - \frac{I_y I_{\omega_B y} - I_{yz} I_{\omega_B z}}{I_y I_z - I_{yz}^2} = z_B$$

Leikkaus- eli vääntökeskiö $C = B$ sijaitsee napapisteessä profiilin nurkassa. **[1 p.]**

Käyristymisjäyhyys (ei kysytty): Vääntökeskiön suhteen laskettu normeeraamaton sektoriaalinen koordinaatti $\hat{\omega}_C = 0$ koko profiililla ja vastaava sektoriaalinen staattinen momentti $S_{\hat{\omega}_C} = \int_A \hat{\omega}_C \, dA = 0$ sekä normeerattu vääntökeskiön sektoriaalinen koordinaatti $\omega_C = \hat{\omega}_C - \frac{S_{\hat{\omega}_C}}{A} = \hat{\omega}_C = 0$ koko profiililla. Siis sektoriaalinen vääntöjäyhyys eli käyristymisjäyhyys on $I_\omega = \int_A \omega_C^2 \, dA = 0$.

(b) Kahden L-profiilin yhdistelmäprofiilin **vääntöjäyhyys:**

$I_t \approx \frac{1}{3}\sum_i b_i t_i^3 = \frac{1}{3} 4(b/2)bt^3 = \frac{2}{3} bt^3$. **[1/2 p.]**

Vääntökeskiö: Asetetaan napapiste B L-profiilien yhdyskohtaan, jolloin pisteeseen B liittyvillä profiilin osilla pätee $\omega_B = 0$. Ylemmän L-profiilin pystylaipalla ω_B kasvaa nollasta lineaarisesti arvoon $\omega_B = -b^2/4$ kun taas alemman L-profiilin vaakalaipalla ω_B kasvaa nollasta lineaarisesti arvoon $\omega_B = b^2/4$.

Asetetaan yz -koordinaatisto pisteeseen B akselit laippojen suuntaisesti, jolloin koordinaattijakaumat antavat sektoriaaliset tulomomentit

$$I_{\omega_B y} = \int_A \omega_B y \, dA = t\left\{\frac{b/2}{2}(-\frac{b}{2})(-\frac{b^2}{4}) + 0 + 0 + \frac{b/2}{3}\frac{b}{2}\frac{b^2}{4}\right\} = \frac{5tb^4}{96}$$

$$I_{\omega_B z} = \int_A \omega_B z \, dA = t\left\{\frac{b/2}{2}\frac{b}{2}(-\frac{b^2}{4}) + 0 + 0 + \frac{b/2}{3}(-\frac{b}{2})\frac{b^2}{4}\right\} = -\frac{5tb^4}{96} = -I_{\omega_B y} \quad \textbf{[1 p.]}$$

ja jäyhyysmomentit (erityisesti $I_{yz} \neq 0$)

$$I_y = \int_A z^2\, dA = t\left\{\frac{b}{2}(-\frac{b}{2})(-\frac{b}{2}) + \frac{b/2}{3}(-\frac{b}{2})(-\frac{b}{2}) + 0 + \frac{b/2}{3}\frac{b}{2}\frac{b}{2}\right\} = \frac{5b^3}{24}$$

$$I_z = \int_A y^2\, dA = I_y = \frac{5tb^3}{24}$$

$$I_{yz} = \int_A zy\, dA = t\left\{\frac{b/2}{2}(-\frac{b}{2})\frac{b}{2} + 0 + 0 + \frac{b/2}{2}\frac{b}{2}(-\frac{b}{2})\right\} = -\frac{tb^3}{8}$$. **[1 p.]**

Näistä saadaan edelleen vääntökeskiön koordinaatit

$$y_C = y_B + \frac{I_z I_{\omega_B z} - I_{yz} I_{\omega_B y}}{I_y I_z - I_{yz}^2} = y_B + \frac{\frac{5tb^3}{24}(-\frac{5tb^4}{96}) - (-\frac{tb^3}{8})\frac{5tb^4}{96}}{\frac{5tb^3}{24}\frac{5tb^3}{24} - (-\frac{tb^3}{8})^2} = -\frac{5b}{32}$$

$$z_C = z_B - \frac{I_y I_{\omega_B y} - I_{yz} I_{\omega_B z}}{I_y I_z - I_{yz}^2} = z_B - \frac{I_y(-I_{\omega_B z}) - I_{yz}(-I_{\omega_B y})}{I_y I_z - I_{yz}^2} = z_B + \frac{I_y I_{\omega_B z} - I_{yz} I_{\omega_B y}}{I_y I_z - I_{yz}^2} =: z_B - \frac{5b}{32} = -\frac{5b}{32}$$

[1 p.]

Käyristymisjäyhyys (ei kysytty): Vääntökeskiön suhteen laskettu normeeraamattoman sektoriaalisen koordinaatin $\hat{\omega}_C$ jakauma on

…

Vastaava sektoriaalinen staattinen momentti

$$S_{\hat{\omega}_C} = \int_A \hat{\omega}_C\, dA = ...$$

Normeerattu vääntökeskiön sektoriaalinen koordinaatti

$$\omega_C = \hat{\omega}_C - \frac{S_{\hat{\omega}_C}}{A} = ...$$

Sektoriaalinen vääntöjäyhyys eli käyristymisjäyhyys

$$I_\omega = \int_A \omega_C^2\, dA = ...$$

3. Tehtävä:

Ulkoisen kuormituksen q energia "kuluu" sekä laatan taivuttamiseen että alustan kasaan painamiseen. Siis kokonaispotentiaalienergian lauseke on

$$\Pi = U_1 + U_a + V$$

missä laatan muodonmuutosenergia on

$$U_1 = \frac{1}{2}\int_A \mathbf{M}\cdot\boldsymbol{\kappa}\, dA$$

$$= \frac{D}{2}\int_A \{(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2})^2 - 2(1-\nu)[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - (\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y})^2]\}\, dA$$

[1/2 p.]

$$= D(1-\nu)\int_A (\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y})^2 dA$$

$$= D(1-\nu)\frac{w_0^2}{a^2}$$

Yllä on käytetty laatan taipumalle approksimaatiota

$$w(x,y) = \frac{w_0}{a^2}xy\, ; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \frac{w_0}{a^2}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\ ,$$

joka toteuttaa potentiaalienergian minimiperiaatteen vaatimat kinemaattiset reunaehdot $w(x,0) = 0$, $w(0,y) = 0$. Selvitettäväksi jää siis yksi tuntematon vakio w_0. On huomattava, että vapaassa nurkassa tälle approksimaatiolle pätee $w(a,a) \neq 0$. **[3/2 p.]**

Alustan muodonmuutosenergia saadaan suoraan jousivoimaa $p(x,y) = kw(x,y)$ vastaavasta muodonmuutosenergiasta $U_a = \frac{1}{2}\int_A kw^2 \mathrm{dA}$ tai muodonmuutosenergiasta

$$U_a = \frac{1}{2}\int_V \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}\, dV = \frac{1}{2}\int_h\int_A p\frac{w}{H}\mathrm{dA}dh$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{H}\int_0^H dh \int_A kww\mathrm{dA} = \frac{k}{2}\int_A w^2\mathrm{dA} \quad \textbf{[3/2 p.]}$$

$$= \frac{k}{2}\frac{w_0^2}{a^4}\int_A x^2y^2\mathrm{dA} = \frac{ka^2w_0^2}{18}$$

Kuorman potentiaalienergia on

$$V = -\int_A qw\mathrm{dA} = -q\frac{w_0}{a^2}\int_A xy\mathrm{dA} = -\frac{qa^2w_0}{4}$$

Kokonaispotentiaalienergian

$$\Pi = U_1 + U_a + V = \frac{D(1-\nu)w_0^2}{a^2} + \frac{ka^2w_0^2}{18} - \frac{qa^2w_0}{4}$$

minimi saavutetaan, kun

$$0 = \delta\Pi = \frac{\partial \Pi}{\partial w_0}\delta w_0 \Rightarrow \frac{\partial \Pi}{\partial w_0} = 0$$

$$\Rightarrow w_0\left\{\frac{2D(1-\nu)}{a^2} + \frac{ka^2}{9}\right\} - \frac{qa^2}{4} = 0 \Rightarrow w_0 = \frac{qa^2}{4}\frac{1}{\frac{2D(1-\nu)}{a^2} + \frac{ka^2}{9}} = \frac{9qa^4}{4(18D(1-\nu) + ka^4)}$$

Maksimitaipuma saavutetaan laatan vapaassa nurkassa:

$$w_{\max} = w(a,a) = w_0 = \frac{9qa^4}{4(18D(1-\nu) + ka^4)}$$ **[3/2 p.]**

4. Tehtävä:

Sauvojen massat ovat $m_1 = \rho L A_1 = \rho L \pi R^2$ ja $m_2 = \rho L A_1 = \rho L \pi (R/2)^2 = m_1/4$. Rakenteen keskelle sauvojen yhdyskohtaan keskitetään siis massa

$$m = m_1/2 + m_2/2 = 5m_1/8$$

eli molempien sauvojen massoista puolet. **[1 p.]**

Toiset puolet massoista keskitetään rakenteen jäykästi kiinnitettyihin päätyihin, joten ne eivät tule mukaan värähtelysysteemiin. Yhdyskohdan massapisteen aksiaalinen asema $x(t)$ on systeemin ainoa vapausaste. Voimatasapainoehto systeemin hitausvoimalle, jousivoimalle ja herätekuormalle ajanhetkellä t on

$m\ddot{x}(t) + kx(t) = f(t)$. **[1 p.]**

Kokonaisjousivakio määräytyy ”rinnan” olevien sauvojen puristusjäykkyyksistä:

$k = k_1 + k_2 = \dfrac{EA_1}{L} + \dfrac{EA_2}{L} = \dfrac{E}{L}(A_1 + A_2) = \dfrac{5\pi R^2 E}{4L}$. **[2 p.]**

(Liikeyhtälö voidaan kirjoittaa myös suoraan muodossa

$f(t) = m\ddot{x}(t) + \dfrac{EA_1}{L}x(t) + \dfrac{EA_2}{L}x(t) = m\ddot{x}(t) + \dfrac{5\pi R^2 E}{4L}x(t)$. **[3 p.]**)

Koska systeemissä on vain yksi vapausaste, sen alin ja ainoa ominaistaajuus on

$\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}} = \sqrt{\dfrac{\dfrac{5\pi R^2 E}{4L}}{5\rho L \pi R^2/8}} = \dfrac{1}{L}\sqrt{\dfrac{2E}{\rho}}$. **[1 p.]**