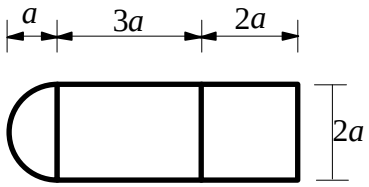
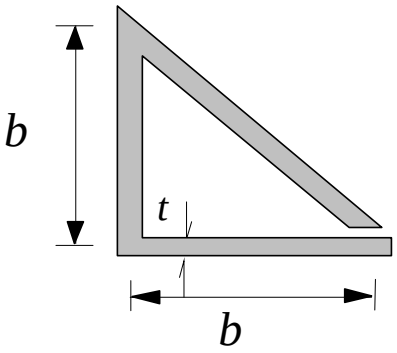
Rak-54.116 Rakenteiden mekaniikka C, RM C 4ov
Tentti 30. 10. 2007

Kirjoita jokaiseen koepaperiin selvästi
- koko nimesi puhuttelunimi alleviivattuna
- osasto, vuosikurssi, tentin päivämäärä sekä tentittävä opintojakso koodeineen
- opiskelijanumerosi (mukaanlukien tarkastuskirjain)
- monettako kertaa olet ko. opintojaksoa suorittamassa
- minä vuonna olet suorittanut pakolliset harjoitustehtävät

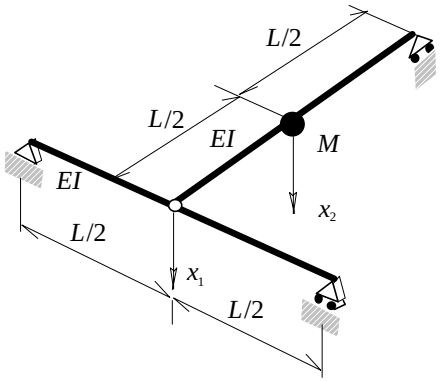
1) Määritä leikkausvuo kussakin oheisen kolmikoteloisen poikkileikkauksen seinämässä. Sauvan pituus on L ja sitä kuormittaa vääntömomentti T. Seinämänpaksuus t on vakio.



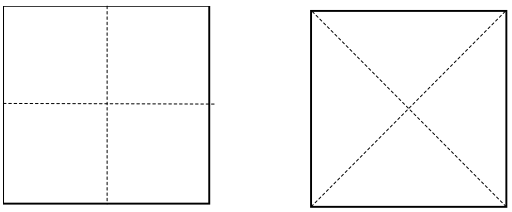
2) Oheinen ohutseinämäinen $(t << b)$ kolmioputki on leikattu auki kuvion osoittamalla tavalla. Määritä näin saatavan poikkileikkauksen leikkauskeskiön asema, sekä vääntö- ja käyristymisjäyhyydet I_t ja I_ω. Seinämänpaksuus t on vakio.



3) Oheisessa avaruuskehässä sauvojen massan otaksutaan jakaantuvan siten, että puolet on sauvan keskipisteessä ja neljäsosa kummassakin päässä. Toisen sauvan keskipisteessä on lisäksi massa M = 3000 kg. Määritä kehän kaksivapausasteisen värähtelyn ominaistaajuudet ja ominaismuodot. Sauvojen massa on 300 kg/m, taivutusjäykkyys $EI = 60$ MNm^2 ja pituus L = 20 m.



4) Neliölaatta (sivun pituus a) on tuettu +-muotoiselle tukikehikolle kahdella eri tavalla oheisen kuvan mukaisesti. Määritä käyttämällä potentiaalienergian minimin periaatetta ja soveltuvaa taipuman approksimaatiota laatan suurimman taipuman likiarvo kummassakin tapauksessa. Laatan kuormana on omapaino, ja sen taivutusjäykkyys on $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$.



Rak-54.116 Rakenteiden mekaniikka C, RM C (4ov)

Kaavakokoelma tenttiin 30.10.2007

Lisää peruskaavoja kaavakokoelmissa RM-A ja RM-B.

Muodonmuutokset kaksidimensioisessa tapauksessa

$$\varepsilon_s = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial s} \cdot \mathbf{e}_s, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \cdot \mathbf{e}_y, \quad \gamma_{sy} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial s} \cdot \mathbf{e}_y + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \cdot \mathbf{e}_s$$

Sisäinen virtuaalinen työ

$$\delta W_s = -\int_V \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \boldsymbol{\varepsilon} \, dV$$

Ulkoinen virtuaalinen työ

$$\delta W_u = \int_V \mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{u} \, dV + \int_{S_T} \overline{\mathbf{T}} \cdot \delta \mathbf{u} \, ds$$

Virtuaalisen työn periaate

$$\delta W_s + \delta W_u = 0$$

Sauvan jännitysresultantit: momentit, normaalivoima ja leikkausvoimat

$$M_i(s) := \int_A \sigma_s(s,y) y^i dA, \quad N(s) := M_0(s) := \int_A \sigma_s(s,y) dA, \quad Q_i(s) := \int_A \tau_{sy}(s,y) y^i dA$$

Vääntöjäyhyys umpinaiselle, reiälliselle, moniosaiselle ohuelle suorakaiteelle sekä yksi- ja monikoteloiselle sauvalle

$$I_t = I_p + \int_A \left(y \frac{\partial \psi}{\partial z} - z \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) dA$$

$$I_t = \frac{2}{G\theta} \left(H A_r + \int_A \Phi \, dA \right)$$

$$I_t = \frac{M_t}{G\theta}, \quad I_t = 2 \int_A \Phi \, dA = 2 \int_A w \, dA, \quad I_t \approx \frac{1}{3} \sum_i b_i t_i^3$$

$$I_t = \frac{4A^2}{\oint_C \frac{ds}{t}} + \frac{1}{3} \oint_C t^3 \, ds \approx \frac{4A^2}{\oint_C \frac{ds}{t}}, \quad I_t = \frac{2}{G\theta} \sum_i q_i A_i = \frac{M_t}{G\theta}$$

Monikoteloisen sauvan vääntö

$$\oint_{C_i} \frac{q_i}{Gt\theta} ds - \sum_{k \neq i} \int_{C_{ik}} \frac{q_k}{Gt\theta} ds = 2A_i$$

Sektoriaalinen koordinaatti pisteen B suhteen

$$\omega_B = \pm \int_{P_0}^{P} h_B \, ds = -\int_{P_0}^{P} [(z - z_B) dy - (y - y_B) dz]$$

Sektoriaaliset tulomomentit

$$I_{\omega_B y} = \int_A \omega_B y \, dA, \quad I_{\omega_B z} = \int_A \omega_B z \, dA$$

Jäyhyysmomentit

$$I_y = \int_A z^2 \, dA, \quad I_z = \int_A y^2 \, dA, \quad I_{yz} = \int_A zy \, dA$$

KÄÄNNÄ!

Vääntö- eli leikkauskeskiö C

$$y_C = y_B + \frac{I_z I_{\omega_B z} - I_{yz} I_{\omega_B y}}{I_y I_z - I_{yz}^2} = y_B + \frac{I_{\omega_B z}}{I_y}; \quad jos\ I_{yz} = 0$$

$$z_C = z_B - \frac{I_y I_{\omega_B y} - I_{yz} I_{\omega_B z}}{I_y I_z - I_{yz}^2} = z_B - \frac{I_{\omega_B y}}{I_z}; \quad jos\ I_{yz} = 0$$

Sektoriaalinen staattinen momentti vääntökeskiön sektoriaaliselle koordinaatille

$$S_{\hat{\omega}_C} = \int_A \hat{\omega}_C \, dA,$$

Normeerattu vääntökeskiön sektoriaalinen koordinaatti

$$\omega_C = \hat{\omega}_C - \frac{S_{\hat{\omega}_C}}{A}$$

Sektoriaalinen staattinen momentti

$$S_{\omega_C}(s) = \int_0^s \omega_C(s)\, t \, ds$$

Sektoriaalinen vääntöjäyhyys eli käyristymisjäyhyys

$$I_\omega = \int_A \omega_C^2 \, dA$$

Potentiaalienergia

$$\Pi = U + V$$

Muodonmuutosenergia

$$U = \frac{1}{2}\int_V \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \, dV$$

Ulkoisen kuormituksen potentiaali

$$V = -\int_V \mathbf{F} \cdot \mathbf{u} \, dV - \int_{S_T} \overline{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{u} \, ds$$

Kirchhoff-laatan muodonmuutosenergia

$$U = \frac{1}{2}\int_A \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\kappa} \, dA = \frac{D}{2}\int_A \{(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2})^2 - 2(1-\nu)[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - (\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y})^2]\} \, dA$$

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$$

Sauvan muodonmuutosenergia taivutus-, leikkaus-, puristus- ja vääntötapauksessa

$$U = \frac{1}{2}\int_0^L \{EI\kappa^2 + \frac{GA}{\zeta}\gamma_{xy}^2 + EA\varepsilon_x^2 + GI_t\varphi_t^2\} \, dx$$

Jousivoima ja jousen muodonmuutosenergia

$$F = kx, \qquad U = \frac{1}{2}kx^2$$

Yksivapausteisen jousi–massa-systeemin vapaan värähtelyn differentiaaliyhtälö, yleinen ratkaisu ja ominaiskulmataajuus

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = 0, \qquad x(t) = C_1 \sin(\omega t) + C_2 \cos(\omega t), \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Lisää peruskaavoja kaavakokoelmissa RM-A ja RM-B.

Rak-54.116 Rakenteiden mekaniikka C, RM C (4 ov)

Ratkaisutiivistelmät tenttiin 30.10.2007
[suluissa pisteytys]

1. Tehtävä:

Sovelletaan monikoteloisen sauvan väännön kaavaa

$$\oint_{C_i} \frac{q_i}{Gt\theta} ds - \sum_{k \neq i} \int_{C_{ik}} \frac{q_k}{Gt\theta} ds = 2A_i \text{ , } \textbf{[1 p.]}$$

josta saadaan yhtälöryhmä

$$\mathbf{Sq} = 2Gt\theta\mathbf{a} \text{ , } \mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} \text{ , } \mathbf{S} = \begin{bmatrix} s_1 & -s_{12} & s_{13} \\ & s_2 & -s_{23} \\ symm. & & s_3 \end{bmatrix} \text{ , } \mathbf{a} = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} \text{ ,}$$

missä seinämien pituudet s_{ij} on kerätty matriisiin $\mathbf{S}$ ja osapinta-alat A_i vektoriin $\mathbf{a}$ (ks. numeroarvot laskuharjoituksen 5 tehtävästä 3). Leikkausvuot seinämissä saadaan yhtälöryhmän ratkaisusta

$\mathbf{q} = 2Gt\theta\mathbf{S}^{-1}\mathbf{a}$. **[3 p.]**

Vääntömomentille pätee

$$T = M_t = 2\mathbf{q}\mathfrak{g}\mathbf{a} = 4Gt\theta\mathbf{S}^{-1}\mathbf{a}\mathfrak{g}\mathbf{a} \text{ ,}$$

mistä saadaan vääntymä

$$\theta = \frac{T}{4Gt\mathbf{S}^{-1}\mathbf{a}\mathfrak{g}\mathbf{a}} \text{ ,}$$

joten ratkaisun lopullinen muoto on

$$\mathbf{q} = \frac{T\mathbf{S}^{-1}\mathbf{a}}{2\mathbf{S}^{-1}\mathbf{a}\mathfrak{g}\mathbf{a}} \text{ . } \textbf{[1 p.]}$$

2. Tehtävä:

Vääntöjäyhyys: $I_t \approx \frac{1}{3}\sum_i b_i t_i^3 = \frac{1}{3}(2+\sqrt{2})bt^3$. **[1 p.]**

Vääntökeskiö: Lasketaan ensin profiilin painopiste profiilin suorasta kulmasta mitattuna:

$$z_P = y_P = \frac{\frac{b}{2}bt + 0bt + \frac{b}{2}\sqrt{2}bt}{bt + bt + \sqrt{2}bt} = \frac{\sqrt{2}b}{4}.$$

Asetetaan sitten yz -koordinaatisto painopisteeseen (*muuten alla olevat vääntökeskiön kaavat eivät päde sellaisenaan*) suoran kulman muodostavien laippojen suuntaisesti, jolloin tässä koordinaatistossa lasketut koordinaattijakaumat antavat jäyhyysmomentit (erityisesti $I_{yz} \neq 0$)

$$I_y = \int_A z^2\, dA = \frac{(2+5\sqrt{2})tb^3}{24}$$

$$I_z = \int_A y^2\, dA = I_y = \frac{(2+5\sqrt{2})tb^3}{24}$$

$$I_{yz} = \int_A zy\, dA = \frac{(\sqrt{2}-6)tb^3}{24}.$$

Asetetaan napapiste B profiilin ylänurkkaan, jolloin pisteeseen B liittyvillä profiilin osilla pätee $\omega_B = 0$. Jos positiivinen suunta kiertää vastapäivään, niin alalaipalla ω_B kasvaa nollasta lineaarisesti arvoon $\omega_B = bb = b^2$. Koordinaattijakaumien avulla saadaan sektoriaaliset tulomomentit

$$I_{\omega_B y} = \int_A \omega_B y\, dA = \frac{(8-3\sqrt{2})}{24}tb^4$$

$$I_{\omega_B z} = \int_A \omega_B z\, dA = -\frac{\sqrt{2}}{8}tb^4$$

Näistä saadaan edelleen vääntökeskiön koordinaatit

$$y_C = y_B + \frac{I_z I_{\omega_B z} - I_{yz} I_{\omega_B y}}{I_y I_z - I_{yz}^2} \approx -0.70b$$

$$z_C = z_B - \frac{I_y I_{\omega_B y} - I_{yz} I_{\omega_B z}}{I_y I_z - I_{yz}^2} \approx 0.41b \quad \textbf{[3 p.]}$$

Käyristymisjäyhyys: Vääntökeskiön C suhteen laskettu normeeraamattoman sektoriaalisen koordinaatin $\hat{\omega}_C$ jakauma ja vastaava sektoriaalinen staattinen momentti saadaan kaavoista

$$\omega_B = \pm\int_{P_0}^{P} h_B\, ds = -\int_{P_0}^{P}[(z-z_B)dy - (y-y_B)dz]\ ,\ S_{\hat{\omega}_C} = \int_A \hat{\omega}_C\, dA.$$

Normeerattu vääntökeskiön sektoriaalinen koordinaatti ja sektoriaalinen vääntöjäyhyys eli käyristymisjäyhyys

$$\omega_C = \hat{\omega}_C - \frac{S_{\hat{\omega}_C}}{A}\ ,\ I_\omega = \int_A \omega_C^2\, dA \quad \textbf{[1 p.]}$$

3. Tehtävä:

Massamatriisi: Jakamalla massoista puolet keskipisteeseen ja neljännekset sauvojen päihin saadaan massamatriisin alkiot

$m_1 = 0.5mL + 0.25mL = 4500\text{kg}$

$m_2 = 0.5mL + M = 6000\text{kg}$

jolloin massamatriisi on

$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} 4500 & 0 \\ 0 & 6000 \end{bmatrix}\text{kg}$. **[1 p.]**

Jäykkyysmatriisi: Jäykkyysmatriisi **k** muodostetaan ottamalla huomioon, että keskipisteestään kuormitetun päistään vapaasti tuetun sauvan keskipisteen taipuma on $v = \dfrac{PL^3}{48EI}$.

Näin saadaan yhtälöt

$$\begin{cases} X_1 + \frac{1}{2}X_2 = 48EIv_1 / L^3 \\ X_2 = 48EI(v_2 - \frac{1}{2}v_1)/L^3 \end{cases},$$

joista, antamalla vuoronperään arvot $\begin{cases} v_1 = 1 \\ v_2 = 0 \end{cases}$ ja $\begin{cases} v_1 = 0 \\ v_2 = 1 \end{cases}$, saadaan jäykkyysmatriisiksi

$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} 60 & -24 \\ -24 & 48 \end{bmatrix}\dfrac{EI}{L^3}$. **[2 p.]**

Ominaisvärähtely: Tämän jälkeen tasapainoyhtälö voidaan kirjoittaa muotoon

$[\mathbf{m}]\{\ddot{\mathbf{x}}\} + [\mathbf{k}]\{\mathbf{x}\} = \{\mathbf{0}\}, \quad \{\mathbf{x}\} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix},$

joka ratkaistaan yritteellä

$\{\mathbf{x}\} = \{\phi\}\sin(\omega t + \psi)$.

Tämä sijoitettuna tasapainoyhtälöön tuottaa homogeenisen yhtälön

$\left[\mathbf{k} - \omega^2\mathbf{m}\right]\{\phi\}\sin(\omega t + \psi) = \{\mathbf{0}\}$,

josta ominaistaajuudet voidaan ratkaista. **[1 p.]**

Jos merkitään $\alpha = EI/1500L^3[\text{kg}] = 5.0[\text{s}]^{-2}$, saadaan neljännen asteen yhtälö

$(60\alpha - 3\omega^2)(48\alpha - 4\omega^2) - 24^2\alpha^2 = 0$.

Tämän juuret ovat $\omega^2 = 24\alpha = 120\,\text{s}^{-2}$ ja $\omega^2 = 8\alpha = 40\,\text{s}^{-2}$ ja edelleen

$\omega_1 = 6.32\,\mathbf{s}^{-1}$ ja $\omega_2 = 10.95\,\mathbf{s}^{-1}$. Ominaismuodot saadaan ratkaisemalla yhtälöt

$\left[\mathbf{k} - \omega_i^2\mathbf{m}\right]\left\{\phi^{(i)}\right\} = \{\mathbf{0}\},\ i = 1, 2$

olettamalla esimerkiksi että $\phi_1^{(i)} = 1$, jolloin saadaan

$\left\{\phi^{(1)}\right\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -0.5 \end{Bmatrix}$ ja $\left\{\phi^{(2)}\right\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1.5 \end{Bmatrix}$. **[1 p.]**

4. Tehtävä:

Vaakasuuntainen ”plus”-tuenta: Asetetaan xy -koordinaatisto laatan keskelle tuennan suuntaisesti ja käytetään laatan taipumalle approksimaatiota

$$w(x,y)=\frac{w_0}{a^2}xy$$

joka toteuttaa potentiaalienergian minimiperiaatteen vaatimat kinemaattiset reunaehdot $w(x,0)=0$, $w(0,y)=0$.

Selvitettäväksi jää siis yksi tuntematon vakio w_0. **[3/2 p.]**

Tälle approksimaatiolle pätee $\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}=\frac{w_0}{a^2}$, $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0=\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$, joten laatan muodonmuutosenergia on

$$U=\frac{1}{2}\int_A \mathbf{M}\cdot\boldsymbol{\kappa}\,dA=\frac{D}{2}\int_A\{(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2})^2-2(1-\nu)[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y})^2]\}\,dA$$

[1/2 p.]

$$=D(1-\nu)\int_A(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y})^2 dA=D(1-\nu)\frac{w_0^2}{a^2}$$

Kokonaispotentiaalienergian lauseke on $\Pi=U+V$, missä kuorman potentiaalienergia on

$$V=-\int_V \rho g w\mathrm{dA}=-t\rho g\frac{w_\mathrm{o}}{a^2}\int_A xy\mathrm{dA}=-\frac{t\rho g a^2 w_\mathrm{o}}{4}$$ **[1/2 p.]**

Kokonaispotentiaalienergian

$$\Pi=U+V=\frac{D(1-\nu)w_0^2}{a^2}-\frac{qa^2w_0}{4}$$

minimi saavutetaan, kun

$$0=\delta\Pi=\frac{\partial\Pi}{\partial w_0}\delta w_0\Rightarrow\frac{\partial\Pi}{\partial w_0}=0\Rightarrow w_0\frac{2D(1-\nu)}{a^2}-\frac{t\rho g a^2}{4}=0\Rightarrow w_0=\frac{t\rho g a^4}{8D(1-\nu)}$$

Maksimitaipuma saavutetaan laatan vapaassa nurkassa:

$$w_{\max}=w(a,a)=w_0=\frac{t\rho g a^4}{8D(1-\nu)}$$ **[1/2 p.]**

Viisto ”plus”-tuenta: Asetetaan xy -koordinaatisto taas laatan keskelle tuennan suuntaisesti ja käytetään laatan taipumalle samaa approksimaatiota

$$w(x,y)=\frac{w_0}{a^2}xy.$$

joka toteuttaa potentiaalienergian minimiperiaatteen vaatimat kinemaattiset reunaehdot $w(x,0)=0$, $w(0,y)=0$. **[3/2 p.]**

Ainoat muutokset edelliseen ovat kuorman potentiaalienergia

$$V=-\int_V \rho g w\mathrm{dA}=-t\rho g\frac{w_\mathrm{o}}{a^2}\int_A xy\mathrm{dA}=-\frac{t\rho g a^2 w_\mathrm{o}}{24}$$

sekä lisäksi maksimitaipuma saavutetaan laatan vapaan sivun keskellä:

$w_{\max}=w(a/2,a/2)=w_0/4=$ **[1/2 p.]**