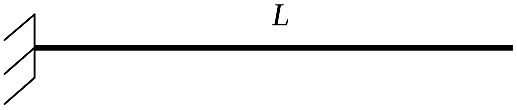
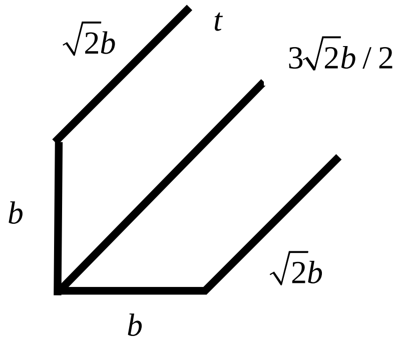
Rak-54.116 Rakenteiden mekaniikka C (4 ov)
Tentti 11.3.2008

Kirjoita jokaiseen koepaperiin selvästi
- koko nimesi, puhuttelunimi alleviivattuna
- osasto, vuosikurssi, tentin päivämäärä ja tentittävä opintojakso koodeineen
- opiskelijanumero, mukaan lukien tarkistuskirjain
- monettako kertaa olet opintojaksoa tenttimässä
- minä vuonna olet saanut tenttioikeuden pakolliset kotitehtävät suorittamalla

1) Suoran sauvan kinematiikka määritellään yhtälöllä
$\mathbf{u}(s,y)=u(s,y)\mathbf{e}_s+v(s,y)\mathbf{e}_y$, $u(s,y)=\alpha(s)-y\beta(s)$, $v(s,y)=w(s)$,
jossa s on sauvan keskilinjan suuntainen koordinaatti ja y on sauvan keskilinjan normaalin suuntainen koordinaatti. Sauvaan kohdistuu jakaantunut kuorma $\mathbf{f}(s,y)=p(s,y)\mathbf{e}_s+q(s,y)\mathbf{e}_y$ ja sauvan pituus on L.
(i) Johda virtuaalisen työn periaatteella tasapainoyhtälöt ulokesauvan jännitysresultanteille, eli normaalivoimalle N, taivutusmomentille M ja leikkausvoimalle Q.
(ii) Määritä samalla myös jännitysresultantteja ja siirtymäsuureita koskevat reunaehdot.

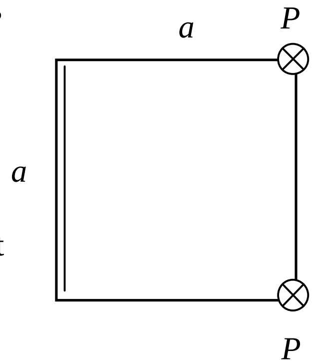




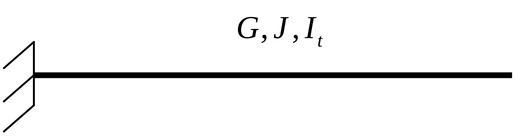
2) Määritä oheisen kuvan avoimelle poikkileikkaukselle
(i) vääntöjäyhyys I_t ja
(ii) leikkaus- eli vääntökeskiön asema.
(iii) Selvitä lisäksi sanallisesti ja kaavojen avulla, miten käyristymisjäyhyys I_ω lasketaan.

Laippojen paksuus on t ja pituudet ovat b, $\sqrt{2}b$ sekä $3\sqrt{2}b/2$. Viistot laipat ovat $45°$ kulmassa suoran kulman muodostaviin profiilin osiin nähden.

3) Neliönmuotoisen ulokelaatan sivumitta on a, paksuus t ja taivutusjäykkyys
$D=Et^3/[12(1-\nu^2)]$.
(i) Laattaa kuormittaa molemmissa vapaissa nurkissa sijaitsevat samansuuntaiset pistekuormat P. Laske arvio laatan maksimitaipumalle käyttämällä Kirchhoffin laattamallia ja potentiaalienergian minimin periaatetta sekä menetelmään soveltuvaa taipuman yritefunktiota.
(ii) Miten taipuman yritefunktiota on muutettava, jos nurkkien pistekuormat ovatkin vastakkaissuuntaiset?



4) Pyöreän akselin leikkausmoduli on G, hitausmomentti J ja vääntövastus I_t.
(i) Johda jatkuvamassaisen akselin vääntövärähtelyn osittaisdifferentiaaliyhtälö.
(ii) Määritä tätä tasapainoyhtälöä soveltaen ulokesauvan kaksi alinta ominaiskulmataajuutta.



Rak-54.116 Rakenteiden mekaniikka C, RM C (4ov)

Kaavakokoelma tenttiin 11.3.2008

Lisää peruskaavoja kaavakokoelmissa RM-A ja RM-B.

Muodonmuutokset kaksidimensioisessa tapauksessa

$$\varepsilon_s = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial s} \cdot \mathbf{e}_s, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \cdot \mathbf{e}_y, \quad \gamma_{sy} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial s} \cdot \mathbf{e}_y + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \cdot \mathbf{e}_s$$

Sisäinen virtuaalinen työ

$$\delta W_s = -\int_V \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \boldsymbol{\varepsilon} \, dV$$

Ulkoinen virtuaalinen työ

$$\delta W_u = \int_V \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} \, dV + \int_{S_T} \bar{\mathbf{t}} \cdot \delta \mathbf{u} \, ds$$

Virtuaalisen työn periaate

$$\delta W_s + \delta W_u = 0$$

Sauvan jännitysresultantit: momentit, normaalivoima ja leikkausvoimat

$$M_i(s) := \int_A \sigma_s(s,y) y^i dA, \qquad N(s) := M_0(s) := \int_A \sigma_s(s,y) dA, \qquad Q_i(s) := \int_A \tau_{sy}(s,y) y^i dA$$

Vääntöjäyhyys umpinaiselle, reiälliselle, moniosaiselle ohuelle suorakaiteelle sekä yksi- ja monikoteloiselle sauvalle

$$I_t = I_p + \int_A \left(y \frac{\partial \psi}{\partial z} - z \frac{\partial \psi}{\partial y}\right) dA$$

$$I_t = \frac{2}{G\theta}\left(HA_r + \int_A \Phi \, dA\right)$$

$$I_t = \frac{M_t}{G\theta}, \quad I_t = 2\int_A \Phi \, dA = 2\int_A w \, dA, \quad I_t \approx \frac{1}{3}\sum_i b_i t_i^3$$

$$I_t = \frac{4A^2}{\oint_C \frac{ds}{t}} + \frac{1}{3}\oint_C t^3 \, ds \approx \frac{4A^2}{\oint_C \frac{ds}{t}}, \quad I_t = \frac{2}{G\theta}\sum_i q_i A_i$$

Sektoriaalinen koordinaatti pisteen B suhteen

$$\omega_B = \pm \int_{P_0}^{P} h_B \, ds = -\int_{P_0}^{P} [(z - z_B)dy - (y - y_B)dz]$$

Sektoriaaliset tulomomentit

$$I_{\omega_B y} = \int_A \omega_B y \, dA, \quad I_{\omega_B z} = \int_A \omega_B z \, dA$$

Jäyhyysmomentit

$$I_y = \int_A z^2 \, dA, \quad I_z = \int_A y^2 \, dA, \quad I_{yz} = \int_A zy \, dA$$

KÄÄNNÄ!

Vääntö- eli leikkauskeskiö C

$$y_C = y_B + \frac{I_z I_{\omega_B z} - I_{yz} I_{\omega_B y}}{I_y I_z - I_{yz}^2} = y_B + \frac{I_{\omega_B z}}{I_y}\,; \quad jos\ I_{yz} = 0$$

$$z_C = z_B - \frac{I_y I_{\omega_B y} - I_{yz} I_{\omega_B z}}{I_y I_z - I_{yz}^2} = z_B - \frac{I_{\omega_B y}}{I_z}\,; \quad jos\ I_{yz} = 0$$

Sektoriaalinen staattinen momentti vääntökeskiön sektoriaaliselle koordinaatille

$$S_{\hat{\omega}_C} = \int_A \hat{\omega}_C \, dA,$$

Normeerattu vääntökeskiön sektoriaalinen koordinaatti

$$\omega_C = \hat{\omega}_C - \frac{S_{\hat{\omega}_C}}{A}$$

Sektoriaalinen staattinen momentti

$$S_{\omega_C}(s) = \int_0^s \omega_C(s)\, t \, ds$$

Sektoriaalinen vääntöjäyhyys eli käyristymisjäyhyys

$$I_\omega = \int_A \omega_C^2 \, dA$$

Potentiaalienergia

$$\Pi = U + V$$

Muodonmuutosenergia

$$U = \frac{1}{2}\int_V \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \, dV$$

Ulkoisen kuormituksen potentiaali

$$V = -\int_V \mathbf{F} \cdot \mathbf{u} \, dV - \int_{S_T} \overline{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{u} \, ds$$

Kirchhoff-laatan muodonmuutosenergia

$$U = \frac{1}{2}\int_A \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\kappa} \, dA = \frac{D}{2}\int_A \{(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2})^2 - 2(1-\nu)[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - (\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y})^2]\} \, dA$$

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$$

Sauvan vääntövärähtely

$$J\ddot{\varphi}(x,t) - GI_t \varphi''(x,t) = m_t(x,t)$$

$$\varphi(x,t) = X(x)T(t)\,, \quad \ddot{T}(t) + \omega^2 T(t) = 0\,, \quad X''(x) + \frac{J\omega^2}{GI_t} X(x) = 0$$

$$T(t) = C_1 \sin(\omega t) + C_2 \cos(\omega t)$$

$$X(x) = A_1 \sin(\lambda x) + A_2 \cos(\lambda x)\,, \quad \lambda^2 = \frac{J\omega^2}{GI_t}$$

Lisää peruskaavoja kaavakokoelmissa RM-A ja RM-B.

Rak-54.116 Rakenteiden mekaniikka C (4 ov)

Ratkaisutiivistelmät tenttiin 11.3.2008
[suluissa pisteytys]

1. Tehtävä:

(i) Muodonmuutokset ovat nyt

$$\varepsilon_s = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial s}\cdot \mathbf{e}_s = \frac{\partial u}{\partial s} = \alpha'(s) - y\beta'(s)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y}\cdot \mathbf{e}_y = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\gamma_{sy} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial s}\cdot \mathbf{e}_y + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y}\cdot \mathbf{e}_s = \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y} = w'(s) - \beta(s).$$ **[1 p.]**

Sisäinen virtuaalinen työ on muotoa

$$\delta W_s = -\int_V \boldsymbol{\sigma}\cdot\delta\boldsymbol{\varepsilon}\, dV = -\int_V (\sigma_s\delta\varepsilon_s + \sigma_y\delta\varepsilon_y + \tau_{sy}\delta\gamma_{sy})dV$$

$$= -\int_L\int_A \{\sigma_s\delta(\alpha' - y\beta') + \tau_{sy}\delta(w' - \beta)\} dA dL$$

$$= -\int_L \left\{ \int_A \sigma_s(s,y)dA\,\delta\alpha'(s) - \int_A \sigma_s(s,y)y dA\,\delta\beta'(s) + \int_A \tau_{sy}(s,y)dA\,(\delta w' - \delta\beta)(s) \right\} ds$$

$$=: -\int_L \{N(\delta\alpha)' - M_1\,(\delta\beta)' + Q_0((\delta w)' - \delta\beta)\} ds$$

missä normaalivoima ja momentti määritellään lausekkeilla $N(s) := M_0(s) := \int_A \sigma_s(s,y)dA$ ja

$M(s) := M_1(s) := \int_A \sigma_s(s,y) y dA$ sekä leikkausvoima on muotoa $Q(s) := Q_0(s) := \int_A \tau_{sy}(s,y)dA$. **[1 p.]**

Ulkoinen virtuaalinen työ voidaan lausua muodossa

$$\delta W_u = \int_V \mathbf{f}\cdot\delta\mathbf{u}\, dV + \int_{S_T} \overline{\mathbf{t}}\cdot\delta\mathbf{u}\, ds$$

$$= \int_L\int_A p(s,y)\delta u\, dAds + \int_L\int_A q(s,y)\delta v(s,y)\, dAds$$

$$= \int_L \delta\alpha(s)\int_A p(s,y)\, dAds - \int_L \delta\beta(s)\int_A p(s,y)y\, dAds + \int_L \delta w(s)\int_A q(s,y)\, dAds$$

$$= \int_L P\delta\alpha\, ds - \int_L R\delta\beta\, ds + \int_L F\delta w\, ds$$

missä kuormaresultantit on määritelty seuraavasti:

$F(s) := \int_A q(s,y)\, dA$, $P = \int_A p(s,y)dA$ ja $R = \int_A p(s,y)y\, dA$.

Virtuaalisen työn periaatteen mukaan $\delta W_s + \delta W_u = 0$, joten

$$\int_L \{-N(\delta\alpha)' + M(\delta\beta)' - Q((\delta w)' - \delta\beta)\} ds + \int_L P\delta\alpha\, ds - \int_L R\delta\beta\, ds + \int_L F\delta w\, ds = 0.$$ **[1 p.]**

Osittaisintegroimalla saadaan

$$\int_L \{N'\delta\alpha + (-M' + Q)\delta\beta + Q'\delta w\} ds - [N\delta\alpha]_0^L + [M\delta\beta]_0^L - [Q\delta w]_0^L = -\int_L P\delta\alpha\, ds + \int_L R\delta\beta\, ds - \int_L F\delta w\, ds$$

Jotta tämä yhtälö pätee kaikilla variaatioilla $\delta\alpha$, $\delta\beta$ ja δw , on tasapainoyhtälöiden

$-N' = P$, $-M' + Q = R$ ja $-Q' = F$
oltava voimassa välillä $(0, L)$. **[1 p.]**

(ii) Myös jäykästi kiinnitetyn ($s = 0$) ja vapaa reunan ($s = L$) reunaehtojen on oltava voimassa:
$\delta\alpha = 0$, kun $s = 0$, ja $N = 0$, kun $s = L$,
$\delta\beta = 0$, kun $s = 0$, ja $M = 0$, kun $s = L$,
$\delta w = 0$, kun $s = 0$, ja $Q = 0$, kun $s = L$. **[1 p.]**

2. Tehtävä:

(i) Vääntöjäyhyys: $I_t \approx \frac{1}{3}\sum_i b_i t_i^3 = \frac{1}{3}(2(1+\sqrt{2})+3\sqrt{2}/2)bt^3 = (\frac{2}{3}+\frac{7\sqrt{2}}{6})bt^3$. **[1 p.]**

(ii) Vääntökeskiö: Aksiaalisen siirtymän tiedetään nyt symmetrian perusteella häviävän pisteessä, jossa symmetria-akseli leikkaa profiilin. Asetetaan siis yz -koordinaatisto profiilin suoraan kulmaan suoran kulman muodostavien laippojen suuntaisesti. Tässä koordinaatistossa lasketut koordinaattijakaumat antavat jäyhyysmomentit (jälkimmäisenä symmetria-akselilla olevan viiston laipan osuus)

$$I_y = \int_A z^2\, dA = \frac{(1+8\sqrt{2})tb^3}{3} + \frac{9\sqrt{2}tb^3}{8} = \frac{(8+91\sqrt{2})tb^3}{24} \approx 5{,}696tb^3$$

$$I_z = \int_A y^2\, dA = I_y = \frac{(1+8\sqrt{2})tb^3}{3} + \frac{9\sqrt{2}tb^3}{8} = \frac{(8+91\sqrt{2})tb^3}{24} \approx 5{,}696tb^3$$

$$I_{yz} = \int_A zy\, dA = \frac{5\sqrt{2}tb^3}{3} + \frac{9\sqrt{2}tb^3}{8} = \frac{67\sqrt{2}tb^3}{24} \approx 3{,}948tb^3.$$

Asetetaan napapiste B profiilin suoraan kulmaan, jolloin kolmella pisteeseen B liittyvällä profiilin osalla pätee $\omega_B = 0$ (suoran kulman muodostavat osat ja keskimmäinen viistolaippa). Jos positiivinen suunta kiertää vastapäivään, niin viistolla alalaipalla ω_B kasvaa nollasta lineaarisesti arvoon $\omega_B = (\sqrt{2}b/2)(\sqrt{2}b) = b^2$ ja viistolla ylälaipalla arvoon $\omega_B = -b^2$. Koordinaattijakaumien avulla saadaan sektoriaaliset tulomomentit

$$I_{\omega_B y} = \int_A \omega_B y\, dA = t\left\{\frac{\sqrt{2}b}{3}b(-b^2) + \frac{\sqrt{2}b}{6}(b+2(2b))b^2\right\} = \frac{\sqrt{2}}{2}tb^4$$

$$I_{\omega_B z} = \int_A \omega_B z\, dA = t\left\{\frac{\sqrt{2}b}{3}bb^2 + \frac{\sqrt{2}b}{6}(b+2(2b))(-b^2)\right\} = -\frac{\sqrt{2}}{2}tb^4$$

Näistä saadaan edelleen vääntökeskiön koordinaatit

$$y_C = y_B + \frac{I_z I_{\omega_B z} - I_{yz} I_{\omega_B y}}{I_y I_z - I_{yz}^2} \approx -0.40b$$

$$z_C = z_B - \frac{I_y I_{\omega_B y} - I_{yz} I_{\omega_B z}}{I_y I_z - I_{yz}^2} = y_C \quad \textbf{[3 p.]}$$

Symmetria-akselilla oleva viisto laippa olisi voitu jättää kokonaan pois laskuista, koska se ei vaikuta vääntökeskiön asemaan eikä käyristymisjäyhyyteen.

(iii) Käyristymisjäyhyys: Vääntökeskiön C suhteen laskettu normeeraamattoman sektoriaalisen koordinaatin $\hat{\omega}_C$ jakauma ja vastaava sektoriaalinen staattinen momentti saadaan kaavoista

$$\hat{\omega}_C = \pm\int_{P_0}^{P} h_C\, ds = -\int_{P_0}^{P}[(z-z_C)dy - (y-y_C)dz] \quad \text{ja} \quad S_{\hat{\omega}_C} = \int_A \hat{\omega}_C\, dA.$$

Normeerattu vääntökeskiön sektoriaalinen koordinaatti ja sektoriaalinen vääntöjäyhyys eli käyristymisjäyhyys lasketaan kaavoista

$$\omega_C = \hat{\omega}_C - \frac{S_{\hat{\omega}_C}}{A} \quad \text{ja} \quad I_\omega = \int_A \omega_C^2\, dA. \quad \textbf{[1 p.]}$$

3. Tehtävä:

(i) Samansuuntaiset kuormat: Asetetaan xy -koordinaatisto laatan vasempaan alanurkkaan sivujen suuntaisesti ja käytetään laatan taipumalle approksimaatiota

$$w(x,y)=\frac{w_0}{a^2}x^2 \ ,$$

joka on fysikaalisesti järkevä ja toteuttaa potentiaalienergian minimiperiaatteen vaatimat kinemaattiset reunaehdot $w(0,y)=0$ (taipuma, vasen sivu) ja $\frac{\partial w}{\partial x}(0,y)=0$ (kiertymä, vasen sivu).

Selvitettäväksi jää siis yksi tuntematon vakio w_0. **[3/2 p.]**

Tälle approksimaatiolle pätee

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}=0 \, , \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=2\frac{w_0}{a^2} \, , \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0 \, ,$$

joten laatan muodonmuutosenergia on

$$U=\frac{1}{2}\int_A \mathbf{M}\cdot\boldsymbol{\kappa}\, dA=\frac{D}{2}\int_A \{(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2})^2-2(1-\nu)[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y})^2]\}\, dA$$

[1 p.]

$$=\frac{D}{2}\int_A (2\frac{w_0}{a^2})^2\, dA = 2D\frac{w_0^2}{a^2}$$

Kokonaispotentiaalienergian lauseke on muotoa $\Pi=U+V$, missä kuorman potentiaalienergia on

$$V=-\int_V \mathbf{F}\cdot\delta\mathbf{u}\, dV-\int_{S_T}\bar{\mathbf{T}}\cdot\delta\mathbf{u}\, ds=-\{Pw(a,0)+Pw(a,a)\}=-2Pw_0 \, .$$ **[1/2 p.]**

Kokonaispotentiaalienergian

$$\Pi=U+V=\frac{2Dw_0^2}{a^2}-2Pw_0$$

minimi saavutetaan, kun

$$0=\delta\Pi=\frac{\partial\Pi}{\partial w_0}\delta w_0 \Rightarrow 0=\frac{\partial\Pi}{\partial w_0}=\frac{4Dw_0}{a^2}-2P \Rightarrow w_0=\frac{Pa^2}{2D}$$

Maksimitaipuma saavutetaan laatan kuormitetuissa nurkassa:

$$w_{\max}=w(a,0)=w(a,a)=w_0=\frac{Pa^2}{2D}$$ **[1 p.]**

(ii) Vastakkaissuuntaiset kuormat (toinen ylös, toinen alas): Asetetaan xy -koordinaatisto keskelle laatan vasenta kiinnitettyä laitaa sivujen suuntaisesti, jolloin laatan taipumalle voidaan käyttää periaatteessa samaa yritettä kuin i-kohdassa, koska oleelliset reunaehdot toteutuvat. Tämä x -suunnassa toisen asteen yrite ei kuitenkaan onnistu kuvaamaan taipuman muutosta y -suunnassa, eli sitä, että toinen nurkka taipuu alas ja toinen ylös. Yrite on siis tässä tapauksessa epäfysikaalinen ja siten liian yksinkertainen. Parempia yritteitä olisivat esimerkiksi

$$w(x,y)=\frac{w_0}{a^2}x^2y \quad \text{tai} \quad w(x,y)=\frac{w_0}{a^2}x^2y^3 \, ,$$

jotka ottavat huomioon sen, että y -suunnassa epäsymmetrinen kuormitus aiheuttaa y -suunnassa epäsymmetrisen taipuman. **[1 p.]**

4. Tehtävä:

(i) Kirjoitetaan momenttitasapainoehto differentiaaliselle akselinpätkälle:

$$M_t(x+dx,t) - M_t(x,t) + m_t(x,t)dx - J\ddot{\varphi}(x,t)dx = 0$$

Jakamalla yhtälöt puolittain pituudella dx sekä käyttämällä derivaatan ja vääntömomentin määritelmää saadaan tasapainoyhtälöt ja vääntövärähtelyn yhtälö:

$$\begin{cases} M_t(x,t) = GI_t\theta(x,t) = GI_t\varphi'(x,t) \\ \dfrac{dM_t(x,t)}{dx} + m_t(x,t) - J\ddot{\varphi}(x,t) = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow J\ddot{\varphi}(x,t) - GI_t\varphi''(x,t) = m_t(x,t)$. **[2 p.]**

(ii) Värähtely-yhtälön ratkaisua etsitään separoidussa muodossa $\varphi(x,t) = X(x)T(t)$, joka antaa ominaisvärähtelyn $m_t = 0$ tapauksessa

$$\frac{GI_t}{J}\frac{X''}{X} = \frac{\ddot{T}}{T} =: -\omega^2 \Rightarrow \quad \ddot{T} + \omega^2 T = 0 \quad \text{ja} \quad X'' + \frac{J\omega^2}{GI_t}X = 0.$$

Näiden yhtälöiden ratkaisut ovat muotoa

$$T(t) = C_1\sin\omega t + C_2\cos\omega t \ \text{ ja } \ X(x) = D_1\sin\gamma x + D_2\cos\gamma x,\ \gamma^2 = \frac{J\omega^2}{GI_t}.$$ **[1 p.]**

Reunaehdot ovat jäykästi tuetussa päässä $\varphi(0,t) = 0$ ja vapaassa päässä $M_t(L,t) = 0$, mistä seuraa $X(0) = 0 = X'(L)$. Näistä saadaan ehdot $D_2 = 0$ ja $D_1\gamma\cos\gamma L = 0$. Koska $D_1\gamma$ ei voi olla nolla (muuten koko ratkaisu olisi nolla), niin $\cos\gamma L = 0$ ja siis

$$\gamma_i L = i\frac{\pi}{2},\ i = 1,3,\ldots$$

Tästä yhtälöstä voidaan ratkaista ominaiskulmataajuudet

$$\omega_i = \sqrt{\frac{GI_t}{J}}\gamma_i = i\sqrt{\frac{GI_t}{J}}\frac{\pi}{2L},\ i = 1,3,\ldots\ .$$ **[2 p.]**