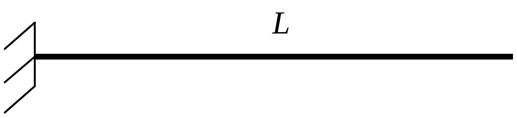
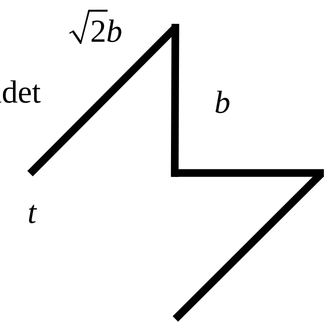
Rak-54.116 Rakenteiden mekaniikka C (4 ov)
Tentti 12.5.2008

Kirjoita jokaiseen koepaperiin selvästi
- koko nimesi, puhuttelunimi alleviivattuna
- osasto, vuosikurssi, tentin päivämäärä ja tentittävä opintojakso koodeineen
- opiskelijanumero, mukaan lukien tarkistuskirjain
- monettako kertaa olet opintojaksoa tenttimässä
- minä vuonna olet saanut tenttioikeuden pakolliset kotitehtävät suorittamalla

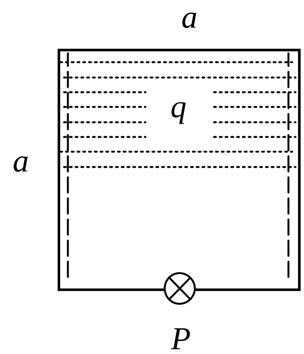
1) Suoran sauvan kinematiikka määritellään yhtälöillä $\mathbf{u}(s,y) = u(s,y)\mathbf{e}_s + v(s,y)\mathbf{e}_y$, $u(s,y) = \alpha(s) - y\beta(s)$, $v(s,y) = w(s)$, joissa s on sauvan keskilinjan suuntainen koordinaatti ja y on sauvan keskilinjan normaalin suuntainen koordinaatti. Sauvaan kohdistuu jakaantunut kuorma $\mathbf{f}(s,y) = p(s,y)\mathbf{e}_s + q(s,y)\mathbf{e}_y$ ja sauvan pituus on L.
(i) Johda virtuaalisen työn periaatteella tasapainoyhtälöt ulokesauvan jännitysresultanteille, eli normaalivoimalle N, taivutusmomentille M ja leikkausvoimalle Q.
(ii) Määritä samalla myös jännitysresultantteja ja siirtymäsuureita koskevat reunaehdot.



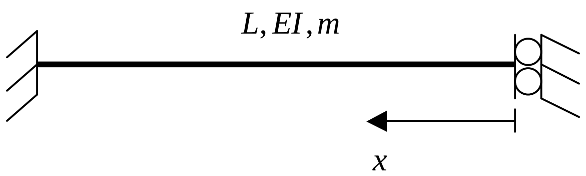
2) Oheisen kuvan avoimen poikkileikkauksen laippojen paksuus on t ja pituudet ovat b ja $\sqrt{2}b$. Kaksi laippaa muodostavat suoran kulman ja kaksi muuta ovat niihin nähden 45 asteen kulmassa. Määritä poikkileikkaukselle
(i) vääntöjäyhyys I_t sekä (ii) leikkaus- eli vääntökeskiön asema.
(iii) Selvitä lisäksi sanallisesti ja kaavojen avulla, miten käyristymisjäyhyys I_ω lasketaan.



3) Neliölaatan sivumitta on a, paksuus t ja taivutusjäykkyys $D = Et^3/[12(1-\nu^2)]$. Laatta on vapaasti tuettu oheisen kuvan mukaisesti kahdelta vastakkaiselta sivultaan, joita yhdistävän keskilinjan (ei tuettu) yläpuolella kuormituksena on tasainen kuorma q, kun taas keskilinjan alapuolisen vapaan sivun keskellä vaikuttaa pistekuorma P. Laske arvio laatan maksimitaipumalle käyttämällä Kirchhoffin laattamallia ja potentiaalienergian minimin periaatetta sekä soveltuvaa taipuman yritefunktiota.



4) Sauvan pituus on L, taivutusjäykkyys EI ja massa pituusyksikköä kohti m.
(i) Johda jatkuvamassaisen sauvan taivutusvärähtelyn osittaisdifferentiaaliyhtälö.
(ii) Määritä tätä tasapainoyhtälöä soveltaen oheisen sauvan alin ominaiskulmataajuus. Sauva on toisesta päästään jäykästi tuettu ja toisessa päässä on jäykkä rullatuki.
(iii) Hahmottele lisäksi kahta alinta ominaiskulmataajuutta vastaavat värähtelymuodot.



Rak-54.116 Rakenteiden mekaniikka C, RM C (4ov)
Kaavakokoelma tenttiin 12.5.2008

Lisää peruskaavoja kaavakokoelmissa RM-A ja RM-B.

Muodonmuutokset kaksidimensioisessa tapauksessa

$$\varepsilon_s = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial s}\cdot \mathbf{e}_s\,, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y}\cdot \mathbf{e}_y\,, \quad \gamma_{sy} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial s}\cdot \mathbf{e}_y + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y}\cdot \mathbf{e}_s$$

Sisäinen virtuaalinen työ

$$\delta W_s = -\int_V \boldsymbol{\sigma}\cdot\delta\boldsymbol{\varepsilon}\, dV$$

Ulkoinen virtuaalinen työ

$$\delta W_u = \int_V \mathbf{F}\cdot\delta\mathbf{u}\, dV + \int_{S_T} \bar{\mathbf{T}}\cdot\delta\mathbf{u}\, ds$$

Virtuaalisen työn periaate

$$\delta W_s + \delta W_u = 0$$

Sauvan jännitysresultantit: momentit, normaalivoima ja leikkausvoimat

$$M_i(s) := \int_A \sigma_s(s,y)y^i dA\,, \qquad N(s) := M_0(s) := \int_A \sigma_s(s,y)dA\,, \qquad Q_i(s) := \int_A \tau_{sy}(s,y)y^i dA$$

Vääntöjäyhyys umpinaiselle, reiälliselle, moniosaiselle ohuelle suorakaiteelle sekä yksi- ja monikoteloiselle sauvalle

$$I_t = I_p + \int_A (y\frac{\partial\psi}{\partial z} - z\frac{\partial\psi}{\partial y})\, dA$$

$$I_t = \frac{2}{G\theta}(HA_r + \int_A \Phi\, dA)$$

$$I_t = \frac{M_t}{G\theta}, \quad I_t = 2\int_A \Phi\, dA = 2\int_A w\, dA, \quad I_t \approx \frac{1}{3}\sum_i b_i t_i^3$$

$$I_t = \frac{4A^2}{\oint_C \frac{ds}{t}} + \frac{1}{3}\oint_C t^3\, ds \approx \frac{4A^2}{\oint_C \frac{ds}{t}}, \quad I_t = \frac{2}{G\theta}\sum_i q_i A_i$$

Sektoriaalinen koordinaatti pisteen B suhteen

$$\omega_B = \pm\int_{P_0}^{P} h_B\, ds = -\int_{P_0}^{P} [(z - z_B)dy - (y - y_B)dz]$$

Sektoriaaliset tulomomentit

$$I_{\omega_B y} = \int_A \omega_B y\, dA, \quad I_{\omega_B z} = \int_A \omega_B z\, dA$$

Jäyhyysmomentit

$$I_y = \int_A z^2\, dA, \quad I_z = \int_A y^2\, dA, \quad I_{yz} = \int_A zy\, dA$$

KÄÄNNÄ!

Vääntö- eli leikkauskeskiö C

$$y_C = y_B + \frac{I_z I_{\omega_B z} - I_{yz} I_{\omega_B y}}{I_y I_z - I_{yz}^2} = y_B + \frac{I_{\omega_B z}}{I_y}; \quad jos\ I_{yz} = 0$$

$$z_C = z_B - \frac{I_y I_{\omega_B y} - I_{yz} I_{\omega_B z}}{I_y I_z - I_{yz}^2} = z_B - \frac{I_{\omega_B y}}{I_z}; \quad jos\ I_{yz} = 0$$

Sektoriaalinen staattinen momentti vääntökeskiön sektoriaaliselle koordinaatille

$$S_{\hat{\omega}_C} = \int_A \hat{\omega}_C \, dA,$$

Normeerattu vääntökeskiön sektoriaalinen koordinaatti

$$\omega_C = \hat{\omega}_C - \frac{S_{\hat{\omega}_C}}{A}$$

Sektoriaalinen staattinen momentti

$$S_{\omega_C}(s) = \int_0^s \omega_C(s) t \, ds$$

Sektoriaalinen vääntöjäyhyys eli käyristymisjäyhyys

$$I_\omega = \int_A \omega_C^2 \, dA$$

Potentiaalienergia

$$\Pi = U + V$$

Muodonmuutosenergia

$$U = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \, dV$$

Ulkoisen kuormituksen potentiaali

$$V = -\int_V \mathbf{F} \cdot \mathbf{u} \, dV - \int_{S_T} \bar{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{u} \, ds$$

Kirchhoff-laatan muodonmuutosenergia

$$U = \frac{1}{2} \int_A \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\kappa} \, dA = \frac{D}{2} \int_A \{ (\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2})^2 - 2(1-\nu)[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - (\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y})^2] \} \, dA$$

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$$

Sauvan taivutusvärähtely

$$(EIv''(x,t))'' + m\ddot{v}(x,t) = p(x,t)$$

$$v(x,t) = X(x)T(t), \quad \ddot{T}(t) + \omega^2 T(t) = 0, \quad X''''(x) - \omega^2 \frac{m}{EI} X(x) = 0$$

$$T(t) = C_1 \sin(\omega t) + C_2 \cos(\omega t)$$

$$X(x) = A_1 \sin(\lambda x) + A_2 \cos(\lambda x) + A_3 \sinh(\lambda x) + A_4 \cosh(\lambda x), \quad \lambda^4 = \omega^2 \frac{m}{EI}$$

Lisää peruskaavoja kaavakokoelmissa RM-A ja RM-B.

Rak-54.116 Rakenteiden mekaniikka C (4 ov)
Ratkaisutiivistelmät tenttiin 12.5.2008
[suluissa pisteytys]

1. Tehtävä:

(i) Muodonmuutokset ovat nyt

$$\varepsilon_s = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial s} \cdot \mathbf{e}_s = \frac{\partial u}{\partial s} = \alpha'(s) - y\beta'(s)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \cdot \mathbf{e}_y = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\gamma_{sy} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial s} \cdot \mathbf{e}_y + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \cdot \mathbf{e}_s = \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y} = w'(s) - \beta(s).$$ **[1 p.]**

Sisäinen virtuaalinen työ on muotoa

$$\delta W_s = -\int_V \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \boldsymbol{\varepsilon}\, dV = -\int_V (\sigma_s \delta\varepsilon_s + \sigma_y \delta\varepsilon_y + \tau_{sy}\delta\gamma_{sy}) dV$$

$$= -\int_L \int_A \left\{ \sigma_s \delta(\alpha' - y\beta') + \tau_{sy}\delta(w' - \beta) \right\} dA dL$$

$$= -\int_L \left\{ \int_A \sigma_s(s,y) dA\, \delta\alpha'(s) - \int_A \sigma_s(s,y) y dA\, \delta\beta'(s) + \int_A \tau_{sy}(s,y) dA\, (\delta w' - \delta\beta)(s) \right\} ds$$

$$=: -\int_L \left\{ N(\delta\alpha)' - M_1\, (\delta\beta)' + Q_0((\delta w)' - \delta\beta) \right\} ds$$

missä normaalivoima ja momentti määritellään lausekkeilla $N(s) := M_0(s) := \int_A \sigma_s(s,y) dA$ ja

$M(s) := M_1(s) := \int_A \sigma_s(s,y) y dA$ sekä leikkausvoima on muotoa $Q(s) := Q_0(s) := \int_A \tau_{sy}(s,y) dA$. **[1 p.]**

Ulkoinen virtuaalinen työ voidaan lausua muodossa

$$\delta W_u = \int_V \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u}\, dV + \int_{S_T} \overline{\mathbf{t}} \cdot \delta \mathbf{u}\, ds$$

$$= \int_L \int_A p(s,y)\delta u\, dA ds + \int_L \int_A q(s,y)\delta v(s,y)\, dA ds$$

$$= \int_L \delta\alpha(s) \int_A p(s,y)\, dA ds - \int_L \delta\beta(s) \int_A p(s,y) y\, dA ds + \int_L \delta w(s) \int_A q(s,y)\, dA ds$$

$$= \int_L P\delta\alpha\, ds - \int_L R\delta\beta\, ds + \int_L F\delta w\, ds$$

missä kuormaresultantit on määritelty seuraavasti:

$F(s) := \int_A q(s,y)\, dA$, $P = \int_A p(s,y) dA$ ja $R = \int_A p(s,y) y\, dA$.

Virtuaalisen työn periaatteen mukaan $\delta W_s + \delta W_u = 0$, joten

$$\int_L \left\{ -N(\delta\alpha)' + M(\delta\beta)' - Q((\delta w)' - \delta\beta) \right\} ds + \int_L P\delta\alpha\, ds - \int_L R\delta\beta\, ds + \int_L F\delta w\, ds = 0.$$ **[1 p.]**

Osittaisintegroimalla saadaan

$$\int_L \left\{ N'\delta\alpha + (-M' + Q)\delta\beta + Q'\delta w \right\} ds - \left[N\delta\alpha \right]_0^L + \left[M\delta\beta \right]_0^L - \left[Q\delta w \right]_0^L = -\int_L P\delta\alpha\, ds + \int_L R\delta\beta\, ds - \int_L F\delta w\, ds$$

Jotta tämä yhtälö pätee kaikilla variaatioilla $\delta\alpha$, $\delta\beta$ ja δw , on tasapainoyhtälöiden

$-N' = P$, $-M' + Q = R$ ja $-Q' = F$
oltava voimassa välillä $(0, L)$. **[1 p.]**

(ii) Myös jäykästi kiinnitetyn ($s = 0$) ja vapaa reunan ($s = L$) reunaehtojen on oltava voimassa:
$\delta\alpha = 0$, kun $s = 0$, ja $N = 0$, kun $s = L$,
$\delta\beta = 0$, kun $s = 0$, ja $M = 0$, kun $s = L$,
$\delta w = 0$, kun $s = 0$, ja $Q = 0$, kun $s = L$. **[1 p.]**

2. Tehtävä:

(i) Vääntöjäyhyys: $I_t \approx \frac{1}{3}\sum_i b_i t_i^3 = \frac{1}{3}2(1+\sqrt{2})bt^3 = \frac{2}{3}(1+\sqrt{2})bt^3$. **[1 p.]**

(ii) Vääntökeskiö: Aksiaalisen siirtymän tiedetään nyt symmetrian perusteella häviävän pisteessä, jossa symmetria-akseli leikkaa profiilin. Asetetaan siis yz -koordinaatisto profiilin suoraan kulmaan suoran kulman muodostavien laippojen suuntaisesti. Tässä koordinaatistossa lasketut koordinaattijakaumat antavat jäyhyysmomentit

$$I_y = \int_A z^2 \, dA = \frac{(1+2\sqrt{2})tb^3}{3} \approx 1,276tb^3$$

$$I_z = \int_A y^2 \, dA = I_y = \frac{(1+2\sqrt{2})tb^3}{3} \approx 1,276tb^3$$

$$I_{yz} = \int_A zy \, dA = -\frac{\sqrt{2}tb^3}{3} \approx -0,471tb^3 .$$

Asetetaan napapiste B profiilin suoraan kulmaan, jolloin pisteeseen B liittyvillä suoran kulman muodostavilla osilla pätee $\omega_B = 0$. Jos positiivinen suunta kiertää vastapäivään, niin viistolla alalaipalla ω_B kasvaa nollasta lineaarisesti arvoon $\omega_B = (\sqrt{2}b/2)(\sqrt{2}b) = b^2$ ja viistolla ylälaipalla arvoon $\omega_B = -b^2$. Koordinaattijakaumien avulla saadaan sektoriaaliset tulomomentit

$$I_{\omega_B y} = \int_A \omega_B y \, dA = t\left\{\frac{\sqrt{2}b}{3}(-b)b^2 + \frac{\sqrt{2}b}{6}b(-b^2)\right\} = -\frac{\sqrt{2}}{2}tb^4 \approx -0,707tb^4$$

$$I_{\omega_B z} = \int_A \omega_B z \, dA = t\left\{\frac{\sqrt{2}b}{6}bb^2 + \frac{\sqrt{2}b}{3}(-b)(-b^2)\right\} = \frac{\sqrt{2}}{2}tb^4 \approx 0,707tb^4$$

Näistä saadaan edelleen vääntökeskiön koordinaatit

$$y_C = y_B + \frac{I_z I_{\omega_B z} - I_{yz} I_{\omega_B y}}{I_y I_z - I_{yz}^2} \approx -0.405b$$

$$z_C = z_B - \frac{I_y I_{\omega_B y} - I_{yz} I_{\omega_B z}}{I_y I_z - I_{yz}^2} = y_C \quad \textbf{[3 p.]}$$

(iii) Käyristymisjäyhyys: Vääntökeskiön C suhteen laskettu normeeraamattoman sektoriaalisen koordinaatin $\hat{\omega}_C$ jakauma ja vastaava sektoriaalinen staattinen momentti saadaan kaavoista

$$\hat{\omega}_C = \pm\int_{P_0}^{P} h_C \, ds = -\int_{P_0}^{P} [(z-z_C)dy - (y-y_C)dz] \quad \text{ja} \quad S_{\hat{\omega}_C} = \int_A \hat{\omega}_C \, dA.$$

Normeerattu vääntökeskiön sektoriaalinen koordinaatti ja sektoriaalinen vääntöjäyhyys eli käyristymisjäyhyys lasketaan kaavoista

$$\omega_C = \hat{\omega}_C - \frac{S_{\hat{\omega}_C}}{A} \quad \text{ja} \quad I_\omega = \int_A \omega_C^2 \, dA. \quad \textbf{[1 p.]}$$

3. Tehtävä:

Asetetaan xy -koordinaatisto laatan vasempaan ala alanurkkaan sivujen suuntaisesti ja käytetään laatan taipumalle approksimaatiota

$$w(x,y)=\frac{w_0}{a^2}x(a-x)=\frac{w_0}{a^2}(xa-x^2)\ ,$$

joka toteuttaa potentiaalienergian minimiperiaatteen vaatimat kinemaattiset reunaehdot $w(0,y)=0$ (vasen sivu) ja $w(a,y)=0$ (oikea sivu). Yrite ei ota huomioon y -suunnan muutosta mutta on kuitenkin fysikaalisesti riittävän hyvä. Selvitettäväksi jää siis yksi tuntematon vakio w_0. **[3/2 p.]**

Tälle approksimaatiolle pätee

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}=0\,,\quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=-2\frac{w_0}{a^2}\,,\quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0\,,$$

joten laatan muodonmuutosenergia on

$$U=\frac{1}{2}\int_A \mathbf{M}\cdot\boldsymbol{\kappa}\,dA=\frac{D}{2}\int_A\{(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2})^2-2(1-\nu)[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y})^2]\}\,dA$$

[1 p.]

$$=\frac{D}{2}\int_A(-2\frac{w_0}{a^2})^2\ dA=2D\frac{w_0^2}{a^2}$$

Kokonaispotentiaalienergian lauseke on $\Pi=U+V$, missä kuorman potentiaalienergia on

$$V=-\int_V \mathbf{F}\cdot\delta\mathbf{u}\,dV-\int_{S_T}\bar{\mathbf{T}}\cdot\delta\mathbf{u}\,ds$$

$$=-\int_A qw(x,y)\,dA-Pw(\frac{a}{2},0)$$

[1 p.]

$$=-q\frac{w_0}{a^2}\int_{a/2}^{a}\int_0^a(xa-x^2)\,dxdy-\frac{Pw_0}{4}$$

$$=-(\frac{P}{4}+\frac{qa^2}{12})w_0$$

Kokonaispotentiaalienergian

$$\Pi=U+V=\frac{2Dw_0^2}{a^2}-(\frac{P}{4}+\frac{qa^2}{12})w_0$$

minimi saavutetaan, kun

$$0=\delta\Pi=\frac{\partial\Pi}{\partial w_0}\delta w_0\Rightarrow 0=\frac{\partial\Pi}{\partial w_0}=w_0\frac{4D}{a^2}-(\frac{P}{4}+\frac{qa^2}{12})\Rightarrow w_0=\frac{qa^4+3Pa^2}{48D}$$

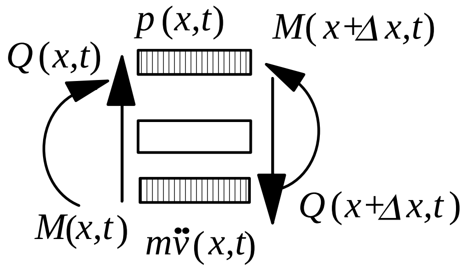
Maksimitaipuma saavutetaan laatan puolivälissä:

$$w_{\max}=w(\frac{a}{2},y)=w_0=\frac{qa^4+3Pa^2}{48D}$$ **[3/2 p.]**

4. Tehtävä:

(i) Kirjoitetaan pystysuora voimatasapainoehto sekä momenttitasapainoehto differentiaaliselle palkin pätkälle:

$$Q(x+\Delta x,t)-Q(x,t)+p(x,t)\Delta x-m\ddot{v}(x,t)\Delta x=0$$
$$M(x+\Delta x,t)-M(x,t)-Q(x)\Delta x+[p(x,t)-m\ddot{v}(x,t)](\Delta x)^2/2=0$$



Jakamalla yhtälöt puolittain pituudella Δx, käyttämällä derivaatan määritelmää ja jättämällä pois korkean asteen termit saadaan tasapainoyhtälöt ja taivutusvärähtelyn yhtälö

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}Q(x,t)}{\mathrm{d}x}+p(x,t)-m\ddot{v}(x,t)=0\\&\frac{\mathrm{d}M(x,t)}{\mathrm{d}x}-Q(x,t)=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow EIv''''(x,t)+m\ddot{v}(x,t)=p(x,t)$$

Tässä on käytetty momentin ja leikkausvoiman määritelmiä $M=-EIv''$ ja $Q=-EIv'''$ sekä oletettu, että EI on vakio.

Ominaisvärähtely-yhtälön ratkaisua etsitään muodossa $v(x,t)=X(x)T(t)$, joka sijoittamalla yhtälöön antaa

$$\frac{EI}{m}\frac{X''''}{X}=-\frac{\ddot{T}}{T}=\omega^2\Rightarrow\begin{cases}\ddot{T}+\omega^2T=0\\X''''-\dfrac{\omega^2m}{EI}X=0\end{cases}$$

(ii) Näiden yhtälöiden ratkaisut ovat

$T(t)=C_1\sin\omega t+C_2\cos\omega t$,

$X(x)=D_1\sin\gamma x+D_2\cos\gamma x+D_3\sinh\gamma x+D_4\cosh\gamma x$,

$\gamma^4=\dfrac{\omega^2m}{EI}$. **[2 p.]**

Reunaehdot ovat rullatukipäädyssä $v'(0,t)=0=Q(0,t)$ ja jäykästi tuetussa päässä $v(L,t)=0=v'(L,t)$, joista seuraa $X'(0)=X'''(0)=0=X(L)=X'(L)$. Näistä saadaan ehdot $D_1\gamma+D_3\gamma=0=-D_1\gamma^3+D_3\gamma^3$ eli $D_1=D_3=0$ ja toisaalta

$$\left.\begin{aligned}D_2\cos\gamma L+D_4\cosh\gamma L=0\\-D_2\gamma\sin\gamma L+D_4\gamma\sinh\gamma L=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow\begin{bmatrix}\cos\gamma L & \cosh\gamma L\\-\gamma\sin\gamma L & \gamma\sinh\gamma L\end{bmatrix}\begin{bmatrix}D_2\\D_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

Yhtälöryhmän kertoimille saadaan nollasta eroavat ratkaisut, jos kerroinmatriisin determinantti häviää:

$\gamma\sinh\gamma L\cos\gamma L+\gamma\sin\gamma L\cosh\gamma L=0\Rightarrow\tanh\gamma L+\tan\gamma=0$.

Yhtälöstä voidaan ratkaista arvot γ_i ja lopulta ominaiskulmataajuudet

$\omega_i=\sqrt{\dfrac{EI}{m}}\gamma_i^2$, $i=1,2,3,\ldots$,

$\gamma_1L=2.3650$, $\omega_1=\sqrt{\dfrac{EI}{m}}\gamma_1^2=\sqrt{\dfrac{EI}{m}}\dfrac{5.6}{L^2}$. **[2 p.]**

(iii) Ominaismuodot noudattavat reunaehtoja: kiertymä on nolla molemmissa päädyissä ja lisäksi siirtymä on nolla jäykässä päädyssä. X_1:llä ei ole yhtään solmukohtaa, X_2:lla on yksi. Solmukohdalla tarkoitetaan tässä palkin ominaismuodon ja palkin deformoitumattoman alkutilan leikkauspistettä. **[1 p.]**