

Mat-1.1040 Matematiikan peruskurssi L4

3. välikoe 10.5.2010

Täytä selvästi *jokaiseen vastauspaperiin* kaikki otsaketiedot. Merkitse kurssikoodi-kohtaan opintojakson numero, nimi ja onko kyseessä tentti vai välikoe. Tutkinto-ohjelmakoodit ovat ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KTA, KON, MAR, MTE, PUU, RRT, TFM, TIK, TLT, TUO, YYT.

Kokeessa saa käyttää ylioppilaskirjoituksissa sallittua laskinta, ei muita apuvälineitä. Koeaika on 3h.

1. Olkoon

$$f(x) = 1 - x/L, \quad 0 \leq x \leq L. \quad (1)$$

- (a) Laske (1):n sinisarjaesitys ja neliöllinen virhe σ_N^2 . Onko sarjan suppeneminen tasaista? Kuinka nopeasti σ_N^2 pienenee?
- (b) Laske (1):n kosinisarjaesitys ja neliöllinen virhe σ_N^2 . Onko sarjan suppeneminen tasaista? Kuinka nopeasti σ_N^2 pienenee?

2. Diskretoi (keskeis)differenssimenetelmällä reuna-arvotehtävä

$$\begin{cases} -u''(x) + qu(x) = f(x), & x \in (0, 1), \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \quad (2)$$

missä $q > 0$ sekä f jatkuva. Nimeä lisäksi jokin menetelmä (suora tai iteratiivinen) syntyneen lineaarisen yhtälöryhmän ratkaisemiseksi.

3. Kun yksidimensioinen lämpöyhtälö $u_t = u_{xx}$ on diskretoitu paikkamuuttujan suhteen, on saatu tavallinen differentiaaliyhtälö $u'_h(t) = \Delta_h u_h(t)$, missä Δ_h :n ominaisarvojen tiedetään olevan välillä $(-4/h^2, 0)$. Olkoon $\theta \in [0, 1]$ ja tarkastellaan aikadiskretointia " θ -perheellä"

$$\mathbf{u}_h^{k+1} = \mathbf{u}_h^k + \delta \Delta_h ((1 - \theta)\mathbf{u}_h^k + \theta\mathbf{u}_h^{k+1}).$$

Millä arvoilla $\delta > 0$, $\theta \in [0, 1]$, $h > 0$ näin diskretoitu systeemi on stabiili?

4. Tarkastellaan reuna-arvotehtävää (2), kun $q=0$.

- (a) Millainen on tehtävän variaatioformulaatio? Miten määritellään sen ratkaisun u Ritz-Galerkin approksimaatio u_h ?
- (b) Mitataan virhettä $u - u_h$ normilla

$$\|u - u_h\|^2 = \langle u' - u'_h, u' - u'_h \rangle = \int_0^1 (u'(x) - u'_h(x))^2 dx.$$

Osoita, että

$$\|u - u_h\|^2 = \|u\|^2 - \|u_h\|^2.$$

Geometrisen tulkinta?