Teknillinen korkeakoulu
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos

Nevanlinna/Ruotsalainen

Mat-1.3460 Funktionaalianalyysin perusteet

2. välikoe, 4.12.2009

Koeaika 2 tuntia. Laskimet eivät ole sallittuja. **English version overleaf.**

1. Tarkastellaan normiavaruutta

$$c_0 = \{x = (\xi_1, \xi_2, \dots) : \xi_j \in \mathbb{C}\ \forall\, j \in \mathbb{N} \text{ ja } \exists N \in \mathbb{N} \text{ s.e. } \xi_j = 0,\ j \geq N\}$$

varustettuna normilla $\|x\| = \sup_j |\xi_j|$. Määritellään operaattori $T : c_0 \to c_0$ siten, että

$$(Tx)_j = \frac{1}{j!}\xi_j$$

kaikille $j \in \mathbb{N}$.

(a) Näytä, että T^{-1} on hyvin määritelty lineaarioperaattori $c_0 \to c_0$.

(b) Näytä, että T on rajoitettu mutta T^{-1} ei ole.

2. Määritellään avaruudessa $l^2(\mathbb{N})$ siirto-operaattorit S ja S^* seuraavasti:

$$Sx = (0, \xi_1, \xi_2, \dots),$$
$$S^*x = (\xi_2, \xi_3, \dots),$$

missä $x = (\xi_1, \xi_2, \dots)$. Tällöin S^* on S:n Hilbert-adjungaatti. Osoita, että

(a) $\sigma_p(S) = \emptyset$ ja $\sigma_p(S^*) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\} =: \mathbb{D}$,

(b) $\sigma(S) = \sigma(S^*) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 1\}$,

(c) $\partial\mathbb{D} \subset \sigma_a(S)$, $\partial\mathbb{D} \subset \sigma_a(S^*)$ ja määritä molemmissa tapauksissa jokin approksimatiivinen ominaisvektorijono, joka vastaa approksimatiivista ominaisarvoa λ.

(d) Asetetaan $T = \alpha S + \beta I$, missä $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ja I on identiteettioperaattori. Määrää $\sigma(T)$.

3. Olkoon X Banachin avaruus ja $A, B, K \in \mathcal{B}(X)$.

(a) Todista, että jos A ja B ovat kompakteja, niin $A + B$ on myös kompakti.

(b) Käyttäen (a)-kohdan tulosta todista, että jos K ja $I + K$ ovat kompakteja, niin $\dim X < \infty$.