Kul-34.3100 Virtausmekaniikan perusteet — Timo Siikonen

Tentti

9.8.2010

Muistathan, että perustelut ovat tärkeä osa laskua ja arvostelua!

Properties of air

density: $\varrho_{\text{air}} = 1.23\,\text{kg/m}^3$
(dynamic) viscosity: $\mu_{\text{air}} = 1.79 \cdot 10^{-5}\,\text{Ns/m}^2$

Properties of water

density: $\varrho_{\text{water}} = 1000\,\text{kg/m}^3$
(dynamic) viscosity: $\mu_{\text{water}} = 1.12 \cdot 10^{-3}\,\text{Ns/m}^2$

Gravitational acceleration: $g = 9.81\,\text{m/s}^2$.

Equations When you use these equations, please explain what are you doing and what principle are you applying. All the equations may not be needed.

Bernoulli equation: $p + \varrho g h + \frac{1}{2}\varrho V^2 = p_T$

Energy balance:

$$\left(p + \varrho g h + \frac{1}{2}\varrho V^2\right)_{\text{out}} = \left(p + \varrho g h + \frac{1}{2}\varrho V^2\right)_{\text{in}} + \text{work done on the control volume} - \text{losses}$$

Losses: $\Delta p_{\text{friction}} = f\frac{l}{D}\frac{1}{2}\varrho V^2 \qquad \Delta p_{\text{loss}} = K\frac{1}{2}\varrho V^2$

Reynolds number: $\text{Re} = \dfrac{\varrho V L}{\mu}$

Power: $P = \Delta p\, Q$

Mass flux: $\dot{m} = \int_A \varrho \vec{V} \cdot \vec{n}\,\text{d}A$

Momentum flux: $\int_A \vec{V}\varrho\vec{V} \cdot \vec{n}\,\text{d}A$

When velocity is constant on surface A, momentum flux: $\vec{V}\dot{m}$

Momentum balance: $\sum \vec{F} = \text{momentum flux out} - \text{momentum flux in}$

Moment of momentum equation:

$$\Sigma\vec{T} = \dot{m}_{\text{out}}\left(\vec{r} \times \vec{V}\right)_{\text{out}} - \dot{m}_{\text{in}}\left(\vec{r} \times \vec{V}\right)_{\text{in}}$$

$$\vec{r} \times \vec{V} = \pm r V_\theta$$

Euler turbomachine equation:

$$P = \dot{m}\,(\pm U V_\theta)_{\text{out}} - \dot{m}\,(\pm U V_\theta)_{\text{in}}$$

Buckingham Π-theorem:

If an equation involving k variables is dimensionally homogeneous, it can be reduced to a relationship among $k - r$ independent dimensionless products, where r is the minimum number of reference dimensions required to describe the variables.

Criteria for the repeating variables:

1. The number of repeating variables is equal to the number of reference dimensions.
2. All the required reference dimensions must be included within the group of repeating variables.
3. Each repeating variable must be dimensionally independent of the others.

Moody chart is at the end of the exam

Material derivative

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \rho = \frac{\partial \rho}{\partial t} + u\frac{\partial \rho}{\partial x} + v\frac{\partial \rho}{\partial y} + w\frac{\partial \rho}{\partial z}$$

Continuity equation and Navier–Stokes equations will be given if they are required in the exam.

1. Tehtävä (6 p.)

Niagaran putousten korkeus on noin 51 m. Jos vesi virtaa putouksen reunan yli nopeudella 2,5 m/s ja kitkan vaikutus voidaan jättää huomiotta, millä nopeudella vesi törmää putouksen alla oleviin kallioihin? Mikä on veden maksimipaine törmäyskohdassa? Toista laskelmat Yosemiten kansallispuistossa sijaitseville putouksille, joiden korkeus on 435 m. Onko tulos mielestäsi järkevä? Perustele vastauksesi.

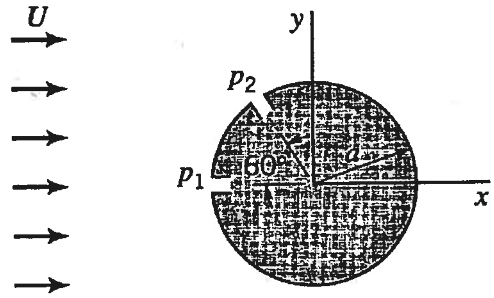
2. Tehtävä (6 p.)

Tarkastellaan virtausta kuvan 1 sylinterin ohi potentiaalivirtausmallilla. Sylinterin säde on R, tulovirtauksen nopeus U ja tulovirtauksen paine p_0.

a) (2p.) Muodosta tilannetta kuvaava virtafunktio yhdistämällä yhdensuuntaisvirtauksen ja dipolin (*doublet*) virtafunktiot. Ratkaise perustellen tarvitsemasi dipolin voimakkuus K.

b) (2p.) Ratkaise nopeuskenttä (v_r ja v_θ) sylinterin pinnalla.

c) (2p.) Ratkaise paine kuvaan 1 merkityissä pisteissä 1 ja 2 käyttäen tulovirtauksen nopeutta, tiheyttä ϱ ja painetta p_0. Voit jättää gravitaation huomioimatta.



Kuva 1: Tehtävän 2 sylinteri

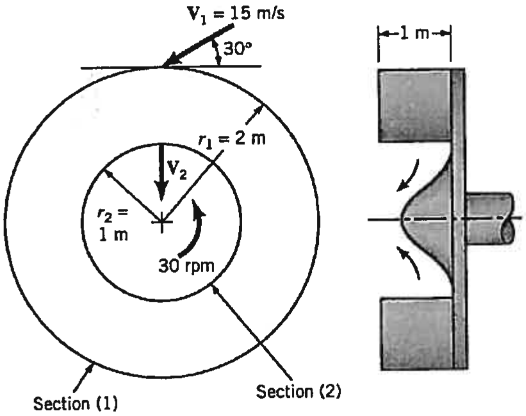
3. Tehtävä (6 p.)

Kuvan 2 vesiturbiini pyörii nopeudella 30 rpm. Turbiinin mittoja on annettu kuvassa. Absoluuttinen virtausnopeus turbiinin sisäänvirtauksessa on 15 m/s ja se on 30° kulmassa roottorin tangenttiin nähden. Ulosvirtauksessa absoluuttinen nopeus on radiaalista.

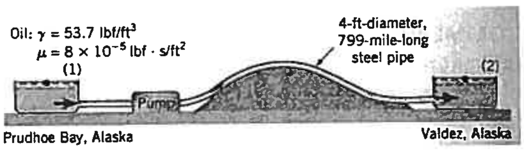
a) (3p.) Ratkaise perustellen ulos- ja sisäänvirtauksen nopeuskolmiot. Merkitse kolmioosi vähintään yhden kulman suuruus ja kahden sivun pituudet.

b) (2p.) Ratkaise, missä kulmassa turbiinin lavat ovat?

c) (1p.) Ratkaise turbiinin teho.



Kuva 2: Tehtävän 3 turbiini



Kuva 3: Alaskan öljyputki (tehtävä 4).

4. Tehtävä (6 p.)

Alaskassa kuljetetaan öljyä (ominaisuudet 60 °C, ρ = 856 kg/m^3 ja μ = 3,8 · 10^{-3} Ns/m^2) (noin neljä kertaa veden viskositeetti) putkessa, jonka pituus on 1280 km ja halkaisija 1,2 m, tilavuusvirran ollessa Q = 3,3 m^3/s (kuva 3). Laske pumppaukseen tarvittava teho.

5. Tehtävä (3 p.)

Navier–Stokesin yhtälöt ovat liikemäärätase differentiaalisessa muodossa. Tarkastellaan laskennallisesti esim. virtausta kappaleen ympärillä. Mitä eroja on Navier–Stokesin yhtälöistä saadulla ratkaisulla ja potentiaaliteorian mukaisella ratkaisulla? Miten hyvin Navier–Stokesin yhtälöiden ratkaisu ennustaa nostovoiman siipiprofiilille ja pyörivälle sylinterille potentiaaliteoriaan verrattuna?

6. Tehtävä (3 p.)

Kuvaile lyhyesti turbulentin ja laminaarin virtauksen eroja. Selosta myös, miten transitio laminaarista turbulentiksi vaikuttaa nopeusprofiiliin virtaviivaisen kappaleen pinnalla ja virtaviivaisen kappaleen vastukseen. Voit käyttää esimerkkinä tasolevyä.

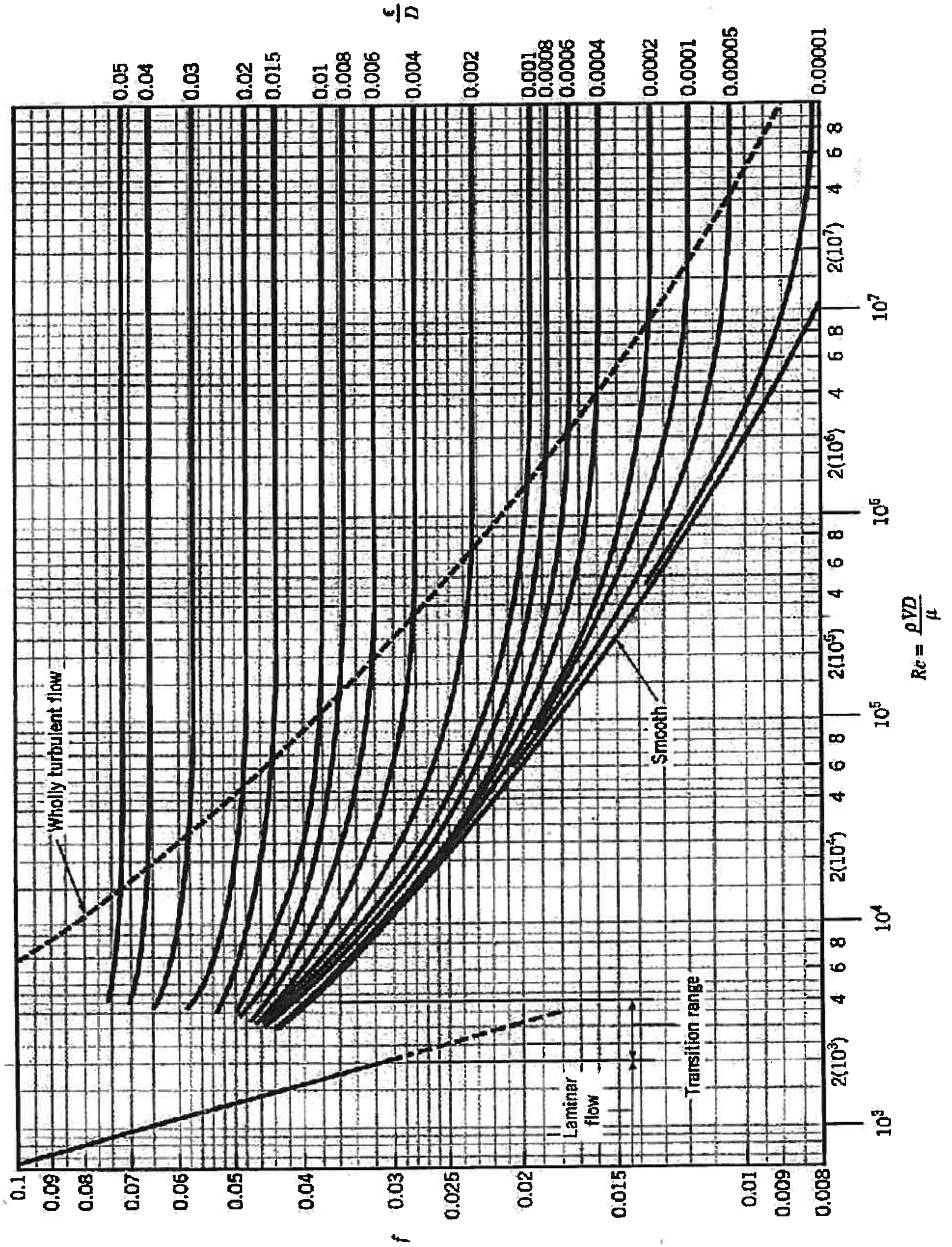
Summary of Basic, Plane Potential Flows

Description of Flow Field	Velocity Potential	Stream Function	Velocity Components[a]
Uniform flow at angle α with the x axis	$\phi = U(x\cos\alpha + y\sin\alpha)$	$\psi = U(y\cos\alpha - x\sin\alpha)$	$u = U\cos\alpha$ $v = U\sin\alpha$
Source or sink $m > 0$ source $m < 0$ sink	$\phi = \dfrac{m}{2\pi}\ln r$	$\psi = \dfrac{m}{2\pi}\theta$	$v_r = \dfrac{m}{2\pi r}$ $v_\theta = 0$
Free vortex $\Gamma > 0$ counterclockwise motion $\Gamma < 0$ clockwise motion	$\phi = \dfrac{\Gamma}{2\pi}\theta$	$\psi = -\dfrac{\Gamma}{2\pi}\ln r$	$v_r = 0$ $v_\theta = \dfrac{\Gamma}{2\pi r}$
Doublet	$\phi = \dfrac{K\cos\theta}{r}$	$\psi = -\dfrac{K\sin\theta}{r}$	$v_r = -\dfrac{K\cos\theta}{r^2}$ $v_\theta = -\dfrac{K\sin\theta}{r^2}$

[a]Velocity components are related to the velocity potential and stream function through relationships:

$u = \frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y} \qquad v = \frac{\partial\phi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x} \qquad v_r = \frac{\partial\phi}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} \qquad v_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta} = -\frac{\partial\psi}{\partial r}$

$\frac{\varepsilon}{D} = 0,05$



Kuva 4: Moody-chart.