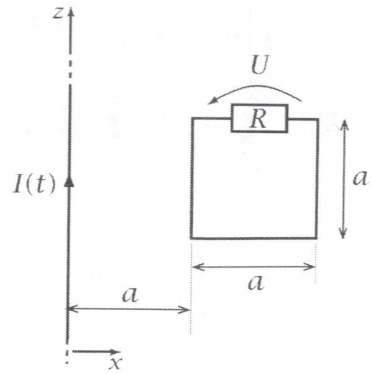
S-96.1121 Dynaaminen kenttäteoria, tentti, 17.5.2010

Ratkaise valintasi mukaan neljä seuraavista viidestä tehtävästä

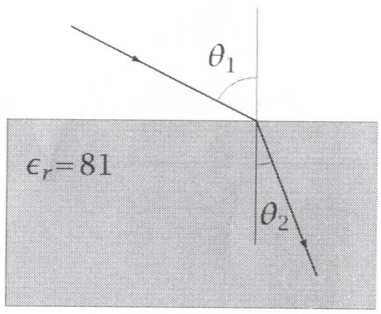
1. Käytännöllisesti katsottuna äärettömän pitkä suora virtajohto sijaitsee z-akselilla samassa tasossa neliönmuotoisen johdinsilmukan kanssa kuvan mukaisesti. Suoran johtimen virta muuttuu äkillisesti tasavirrasta eksponentiaalisesti vaimenevaksi oheisen mallin mukaisesti:

$$I(t) = \begin{cases} I_0 & \text{kun } t \leq 0 \\ I_0\, e^{-t/T_0} & \text{kun } t > 0 \end{cases}$$

Laske jännite U ajan funktiona. $\mu = \mu_0$. Silmukan itseinduktiota ei tarvitse huomioida.



2. Tasoaalto tulee ilmasta vedenpintaan. a) Määrää tulokulma, θ_1, jolla YP-polarisoitunut kenttäkomponentti ei heijastu tasaisesta vedenpinnasta. b) Mikä on KP-polarisoituneet kenttäkomponentin heijastuskerroin tällä tulokulmalla? Veden suhteellinen permittiivisyys, $\epsilon_r = 81$.



3. Suorakulmaisen aaltoputken ($\mu = \mu_0$, $\epsilon = \epsilon_0$, mitat $a = 20\,\text{mm}$, $b = 10\,\text{mm}$) TM_{10}-muodon magneettikenttä on muotoa

$$\overline{H}(x, y, z) = \overline{u}_x H_0 \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) e^{-j\beta z}$$

missä H_0 on reaaliluku. a) Mikä on ko. aaltomuodon rajataajuus f_{c10}? b) Mikä on etenemiskertoimen β arvo taajuudella $f = 8.1\,\text{GHz}$? c) Laske etenevän tehotiheyden aikakeskiarvon lauseke, kun $f = 2f_{c10}$.

4. Meressä ($\epsilon_r = 81$, $\sigma = 4.0\,\text{S/m}$) etenee 1.2 GHz:n taajuudella tasoaalto. Laske aallon kuljettaman tehotiheyden vaimennus desibeleinä yhden aallonpituuden mittaisella matkalla.

5. 7600 MHz taajuudella toimiva radiolinkkiyhteys tarvitaan 6.0 km:n yhteysvälille. a) Mikä vahvistus (desibeleinä) tarvitaan linkkiyhteyden antenneilta (samanlainen antenni molemmissa päissä), kun lähetysteho $P_t = 0.07\,\text{kW}$ ja vastaanottoon tarvitaan $P_r = 0.15\,\mu\text{W}$. b) Kuinka paljon antennien vahvistusta täytyy suurentaa, jos linkkiyhteyden tulee olla toimiva myös sateella, josta voi aiheutua vaimennusta enimmillään 1.1 dB/km?

Vihje: $A_e = \dfrac{\lambda^2}{4\pi} G$

- Tentissä saa käyttää laskinta, mutta ei muuta oheismateriaalia

Nablaoperaatiot

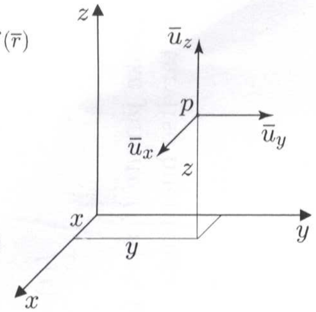
Karteesinen koordinaatisto

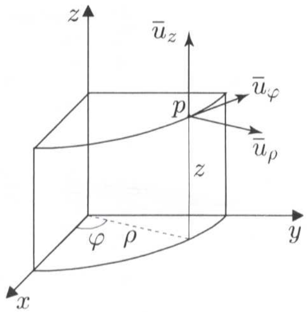
$$\nabla f(\overline{r}) = \overline{u}_x \frac{\partial}{\partial x} f(\overline{r}) + \overline{u}_y \frac{\partial}{\partial y} f(\overline{r}) + \overline{u}_z \frac{\partial}{\partial z} f(\overline{r})$$

$$\nabla \times \overline{f} = \begin{vmatrix} \overline{u}_x & \overline{u}_y & \overline{u}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_x & f_y & f_z \end{vmatrix}$$

$$\nabla \cdot \overline{f}(\overline{r}) = \frac{\partial}{\partial x} f_x(\overline{r}) + \frac{\partial}{\partial y} f_y(\overline{r}) + \frac{\partial}{\partial z} f_z(\overline{r})$$

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$





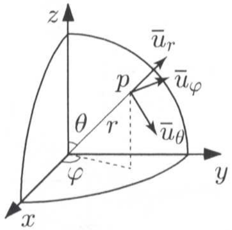
Sylinterikoordinaatisto

$$\nabla f(\overline{r}) = \overline{u}_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} f + \overline{u}_\varphi \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} f + \overline{u}_z \frac{\partial}{\partial z} f$$

$$\nabla \times \overline{f} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \overline{u}_\rho & \rho\overline{u}_\varphi & \overline{u}_z \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_\rho & \rho f_\varphi & f_z \end{vmatrix}$$

$$\nabla \cdot \overline{f} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}(\rho f_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} f_\varphi + \frac{\partial}{\partial z} f_z$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial f}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$



Pallokoordinaatisto

$$\nabla f(\overline{r}) = \overline{u}_r \frac{\partial}{\partial r} f + \overline{u}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} f + \overline{u}_\varphi \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} f$$

$$\nabla \times \overline{f} = \frac{1}{r^2 \sin\theta} \begin{vmatrix} \overline{u}_r & r\overline{u}_\theta & r\sin\theta\,\overline{u}_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ f_r & r f_\theta & r\sin\theta f_\varphi \end{vmatrix}$$

$$\nabla \cdot \overline{f} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 f_r) + \frac{1}{r\sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta f_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} f_\varphi$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$

Koordinaattimuunnokset vektorille $\overline{f}$

Karteesinen ↔ sylinterikoordinaatisto

$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, \quad z = z,$

$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \arctan(y/x), \quad z = z.$

$$\begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_\rho \\ f_\varphi \\ f_z \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} f_\rho \\ f_\varphi \\ f_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix}.$$

Karteesinen ↔ pallokoordinaatisto

$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta,$

$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \theta = \arctan\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}\right), \quad \varphi = \tan^{-1}\frac{y}{x}$

$$\begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \cos\theta\cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\sin\varphi & \cos\varphi \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_r \\ f_\theta \\ f_\varphi \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} f_r \\ f_\theta \\ f_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi & -\sin\theta \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix}.$$

Sylinteri ↔ pallokoordinaatisto

$\rho = r\sin\theta, \quad \varphi = \varphi, \quad z = r\cos\theta,$

$r = \sqrt{\rho^2 + z^2}, \quad \theta = \arctan(\rho/z), \quad \varphi = \varphi.$

$$\begin{pmatrix} f_\rho \\ f_\varphi \\ f_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_r \\ f_\theta \\ f_\varphi \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} f_r \\ f_\theta \\ f_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta & 0 & \cos\theta \\ \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_\rho \\ f_\varphi \\ f_z \end{pmatrix}.$$

Vektori-integraalilaskennan kaavoja

Karteesinen koordinaatisto

$\overline{d\ell} = \overline{u}_x\,dx + \overline{u}_y\,dy + \overline{u}_z\,dz$

$\overline{dS_x} = \overline{u}_x\,dy\,dz$

$\overline{dS_y} = \overline{u}_y\,dx\,dz$

$\overline{dS_z} = \overline{u}_z\,dx\,dy$

$dV = dx\,dy\,dz$

Sylinterikoordinaatisto

$\overline{d\ell} = \overline{u}_\rho\,d\rho + \overline{u}_\varphi \rho\,d\varphi + \overline{u}_z\,dz$

$\overline{dS_\rho} = \overline{u}_\rho \rho\,d\varphi\,dz$

$\overline{dS_\varphi} = \overline{u}_\varphi\,d\rho\,dz$

$\overline{dS_z} = \overline{u}_z \rho\,d\rho\,d\varphi$

$dV = \rho\,d\rho\,d\varphi\,dz$

Pallokoordinaatisto

$\overline{d\ell} = \overline{u}_r\,dr + \overline{u}_\theta r\,d\theta + \overline{u}_\varphi r\sin\theta\,d\varphi$

$\overline{dS_r} = \overline{u}_r r^2 \sin\theta\,d\theta\,d\varphi$

$\overline{dS_\theta} = \overline{u}_\theta r\sin\theta\,dr\,d\varphi$

$\overline{dS_\varphi} = \overline{u}_\varphi r\,dr\,d\theta$

$dV = r^2 \sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi$

Gaussin lause $\displaystyle\int_V \nabla \cdot \overline{f}\,dV = \oint_S \overline{f} \cdot \overline{dS}$

Stokesin lause $\displaystyle\int_S \nabla \times \overline{f} \cdot \overline{dS} = \oint_C \overline{f} \cdot \overline{d\ell}$

Vakioita

$\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12}\,\frac{\mathrm{As}}{\mathrm{Vm}}$

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\,\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{Am}}$

$k_B = 1.38 \cdot 10^{-23}\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}$

$e = 1.60 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$