Matematiikan laitos
Teknillinen korkeakoulu

Pitkäranta/Hiltunen

Mat-1.1010 Peruskurssi L1

Välikoe 1 11.10.2010

Täytä selvästi *jokaiseen vastauspaperiin* kaikki otsaketiedot. Merkitse kurssikoodi-kohtaan opintojakson numero, nimi ja onko kyseessä tentti vai välikoe. Koulutusohjelmakoodit ovat ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KJO, KTA, KON, MAK, MAR, PUU, RAK, TFY, TIK, TLT, TUO, YHD.

Kokeessa ei saa käyttää laskinta. Koeaika on 3h.

1. a) Perustuen kunta-aksioomiin ja niistä johdettuun laskusääntöön $0 \cdot x = 0\ \forall x$ näytä oikeaksi kunnan laskusääntö $(-x) \cdot y = -(x \cdot y)$.
   b) Rationaalilukujen kunnan järjestetyssä laajennuksessa määritellään luvun $x \in \mathbb{Q}$, $x > 0$ m:s juuri $\sqrt[m]{x}$ ($m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$) lukuna a, jolle pätee $a^m = x$ ja $a > 0$. Perustuen tähän määritelmään ja kunta-aksioomiin näytä oikeaksi laskusääntö $\sqrt[m]{x} \cdot \sqrt[m]{y} = \sqrt[m]{x \cdot y}$.

2. On annettu lukujono $\{b_n\}$ ja määritellään palautuva lukujono $\{a_n\}$ seuraavasti:

$$a_0 = 0, \quad a_{n+1} = \frac{na_nb_n + 2n + 1}{2n + 2}, \quad n = 0, 1, \ldots$$

LOL

   a) Olkoon $b_n = 0\ \forall n$. Näytä suoraan lukujonon raja-arvon määritelmästä, että $\lim_n a_n = 1$.
   b) Olkoon $\lim_n b_n = 1$. Määritä raja-arvo $\lim_n a_n$ perustuen tietoon, että raja-arvo on olemassa. Voit käyttää tunnettuja raja-arvojen yhdistelysääntöjä.
   c) Näytä epäsuoralla todistustavalla, että jos $\lim_n b_n = 2$, niin $\lim_n a_n$ ei ole olemassa.

3. a) Jos $\vec{a}, \vec{b}$ ovat lineaarisesti riippumattomat tason vektorit, niin millä t:n arvoilla ($t \in \mathbb{R}$) myös vektorit $\vec{a} - t\vec{b}$ ja $t\vec{a} - 2\vec{b}$ ovat lineaarisesti riippumattomat?
   b) Koordinaatistossa $(O, \vec{a}, \vec{b})$ on $P = (1, -2)$. Miten P ilmoitetaan koordinaatistossa $(O', \vec{c}, \vec{d})$, kun $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$, $\vec{d} = \vec{a} + 2\vec{b}$ ja $O = (1, 1)$ tässä koordinaatistossa?

4. Taso T kulkee pisteiden $(2, 1, -1)$ ja $(1, 2, -2)$ kautta ja leikkaa tason $T_1 : x + 2y + 3z + 4 = 0$ siten, että tasojen välinen diedrikulma (= kulma, jonka tasot muodostavat leikkaussuoran suunnasta nähtynä) on suora kulma. Määritä T:n yhtälö muodossa $ax + by + cz + d = 0$.

$\frac{4}{3} - \frac{2}{3} = -\frac{5}{3} \quad -\frac{4}{3} - \frac{2}{3} = -\frac{13}{3}$

$-\frac{26}{3}c + \frac{2}{3}c - c$

$-\frac{26}{3}c - \frac{1}{3}c = -\frac{27}{3}c$

$-\frac{13}{3}c + \frac{4}{3}c - \frac{6}{3}c$

$-\frac{13}{3} - \frac{2}{3} = -\frac{15}{3} = -5$

$-1 = \frac{4}{3} - \frac{3}{3} = \frac{1}{3}$

Institutionen för matematik
Tekniska högskolan

Pitkäranta/Hiltunen

Mat-1.1010 Grundkurs L1

Mellanförhör 1 11.10.2010

Fyll i tydligt *på varje svarpapper* samtliga uppgifter. På *förhörskod och -namn* skriv kursens kod, namn samt *slutförhör* eller *mellanförhör* med ordningsnummer. Utbildningsprogrammen är ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KJO, KTA, KON, MAK, MAR, PUU, RAK, TFY, TIK, TLT, TUO, YHD.

Räknare är inte tillåten. Examenstid 3h.

1. a) Utgående från axiomen för kroppar samt räkneregeln $0 \cdot x = 0\ \forall x$, som kan härledas av dessa, visa att räkneregeln $(-x) \cdot y = -(x \cdot y)$ gäller för kroppar.
   b) I en ordnad utvidgning av kroppen av rationella talen definieras m:te roten $\sqrt[m]{x}$ av ett tal $x \in \mathbb{Q}$, $x > 0$ ($m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$) som talet a, för vilket gäller att $a^m = x$ och $a > 0$. Utgående från denna definition och axiomen för kroppar visa räkneregeln $\sqrt[m]{x} \cdot \sqrt[m]{y} = \sqrt[m]{x \cdot y}$.

2. Vi har givet en talföljd $\{b_n\}$ och definierar rekursivt en talföljd $\{a_n\}$ på följande sätt:

$$a_0 = 0, \quad a_{n+1} = \frac{n a_n b_n + 2n + 1}{2n + 2}, \quad n = 0, 1, \ldots$$

   a) Låt $b_n = 0\ \forall n$. Visa direkt med hjälp av definionen av talföljdens gränsvärde att $\lim_n a_n = 1$.
   b) Låt $\lim_n b_n = 1$. Bestäm gränsvärdet $\lim_n a_n$ utgående från informationen att gränsvärdet existerar. Du kan använda kända räkneregler för gränsvärden.
   c) Visa med hjälp av indirekt bevisföring att om $\lim_n b_n = 2$, så saknas $\lim_n a_n$.

3. a) Om $\vec{a}$ och $\vec{b}$ är linjärt oberoende vektorer i planet, för vilka värden på t ($t \in \mathbb{R}$) kommer också vektorerna $\vec{a} - t\vec{b}$ och $t\vec{a} - 2\vec{b}$ att vara linjärt oberoende? b) $P = (1, -2)$ i koordinatsystemet $(O, \vec{a}, \vec{b})$. Hur ges P i koordinatsystemet $(O', \vec{c}, \vec{d})$, om $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$, $\vec{d} = \vec{a} + 2\vec{b}$ och $O = (1, 1)$ i detta koordinatsystem?

4. Planet T går genom punkterna $(2, 1, -1)$ och $(1, 2, -2)$ och skär planet T_1 : $x + 2y + 3z + 4 = 0$ så att diedervinkeln mellan planen (= vinkeln som planen bildar om man tittar på dem längs deras skärningslinje) är en rät vinkel. Bestäm T:s ekvation på formen $ax + by + cz + d = 0$.

$-\frac{10}{3} - \frac{2}{3} - \frac{3}{3} = -\frac{15}{3} = -5$ $\quad \frac{3}{2} + \frac{5 \cdot 2}{2} = \frac{13}{2}$

$-\frac{5}{3}c - \frac{4}{3}c - \frac{6}{3}c =$ $\quad \frac{33}{10} + \frac{7 \cdot 10}{10} = \frac{\frac{103}{10}}{8} = \frac{103}{80}$

$(1+t^2)(4+t^2) = 4 + t^2 + 4t^2 + t^4 = t^4 + 5t^2 + 4$