Matematiikan laitos
Teknillinen korkeakoulu

Arponen/Kangaslampi

# Mat-1.1720 Matematiikan peruskurssi V2

1. välikoe 14.6.2010 klo 12-15

Täytä selvästi *jokaiseen vastauspaperiin* kaikki otsaketiedot. Merkitse kurssikoodikohtaan opintojakson numero, nimi ja onko kyseessä tentti vai välikoe. Tutkintoohjelmakoodit ovat ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KTA, KON, MAR, MTE, PUU, RRT, TFM, TIK, TLT, TUO, YYT.

Kokeessa saa käyttää ylioppilaskirjoituksissa sallittua laskinta, ei muita apuvälineitä. Koeaika on 3h.

Calculator is allowed. Exam time is 3 hours.

1. (Ad 9.4.18)

   Millä $x$:n arvoilla sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^2\, 2^{2n}}$$

   (a) suppenee itseisesti,

   (b) suppenee ehdollisesti,

   (c) hajaantuu? (Vihje: suhde?)

   Determine the values of $x$ for which the series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^2\, 2^{2n}}$$

   (a) converge absolutely,

   (b) converge conditionally,

   (c) diverge. (Hint: ratio?)

2. (Ad 12.5.13)

   Erään nesteen lämpötila $T$ riippuu syvyydestä $z$ ja ajasta $t$ lausekkeen $T(z,t) = e^{-t}z$ mukaisesti. Etsi lämpötilan muutosnopeus ajan suhteen pisteessä, joka liikkuu nesteessä siten, että sen syvyys hetkellä $t$ on $f(t)$. Mikä on lämpötilan muutosnopeus, jos $f(t) = e^t$? Mitä tässä tapauksessa tapahtuu?

   Suppose that the temperature $T$ in a certain liquid varies with depth $z$ and time $t$ according to the formula $T(z,t) = e^{-t}z$. Find the rate of change of temperature with respect to time at a point that is moving through the liquid so that at time $t$ its depth is $f(t)$. What is this rate if $f(t) = e^t$? What is happening in this case?

3. (Ad 12.7.11, Chapter Review)

   (a) Mikä on gradientti? Mitä se kuvaa? Selitä muutamalla lauseella.

   (b) Laske funktion $f(x,y) = x^2y$ muutosnopeus pisteessä $(-1,-1)$ vektorin $\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ suuntaan.

   (a) What is a gradient? What does it tell? Explain in a few sentences.

   (b) Find the rate of change of the function $f(x,y) = x^2y$ at $(-1,-1)$ in the direction of the vector $\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$.

4. (Ad 13.2.9)

   Kiekon $x^2 + y^2 \leq 1$ pisteissä lämpötilan antaa funktio

$$T(x,y) = (x+y)e^{-x^2-y^2}.$$

   Etsi lämpötilan minimi ja maksimi kiekon pisteissä.

   The temperature at all points in the disk $x^2 + y^2 \leq 1$ is given by

$$T(x,y) = (x+y)e^{-x^2-y^2}.$$

   Find the maximum and minimum temperatures at points of the disk.

Kaavoja ilman selityksiä / Equalities without explanations:

$$\bar{t}_1 = \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\mathbf{k}, \quad \bar{t}_2 = \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\mathbf{k}$$

$$\bar{n} = \bar{t}_2 \times \bar{t}_1 = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\mathbf{j} - \mathbf{k}$$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} = \frac{f(a+h,b+k) - f(a,b) - hf_x(a,b) - hf_y(a,b)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

$$D\,f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \frac{\partial y_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \frac{\partial y_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial y_3}{\partial x_1} & \frac{\partial y_3}{\partial x_2} & \frac{\partial y_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

$$y'(x_0) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)}$$

$$f(a+h,b+k) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{m} \frac{1}{j!(m-j)!} D_1^j D_2^{m-j} f(a,b) h^j k^{m-j}$$

$$Hess\, f(P) = \begin{pmatrix} f_{xx}(P) & f_{xy}(P) \\ f_{xy}(P) & f_{yy}(P) \end{pmatrix}$$

$$L(x_1,x_2,\ldots,x_n,\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m) = f(x_1,\ldots,x_n) - \lambda_1 g_1(x_1,\ldots,x_n) - \ldots - \lambda_m g_m(x_1,\ldots,x_n)$$

$$\begin{aligned} a &= \frac{\overline{xy} - \overline{x}\,\overline{y}}{\overline{x^2} - (\overline{x})^2}, \qquad \overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \\ b &= \frac{\overline{x^2}\overline{y} - \overline{x}\,\overline{xy}}{\overline{x^2} - (\overline{x})^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(f(x)g(x)) &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \\ \frac{d}{dx}\frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2} \\ \frac{d}{dx}(f(g(x)) &= f'(g(x))g'(x) \end{aligned}$$

$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$$
$$\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$$
$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$
$$\sin(\tfrac{\pi}{2} - x) = \cos(x)$$
$$\cos(\tfrac{\pi}{2} - x) = \sin(x)$$

$$\begin{aligned} \sin(x+y) &= \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y) \\ \sin(x-y) &= \sin(x)\cos(y) - \cos(x)\sin(y) \\ \cos(x+y) &= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) \\ \cos(x-y) &= \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y) \end{aligned}$$

$$\sin(0) = 0$$
$$\cos(0) = 1$$
$$\sin\left(\tfrac{\pi}{4}\right) = \tfrac{1}{\sqrt{2}} = \cos\left(\tfrac{\pi}{4}\right)$$
$$\sin\left(\tfrac{5\pi}{4}\right) = -\tfrac{1}{\sqrt{2}} = \cos\left(\tfrac{5\pi}{4}\right)$$

$$e = 2,718281828459045$$