T-61.246 Digitaalinen signaalinkäsittely ja suodatus

Tentti / 2. välikoe 10.12.2003 klo 9-12. Salit A, B ja C.
Jos teet 2. välikokeen, vastaa kysymyksiin 3, 4, 5, 6.
Jos teet tentin, vastaa kysymyksiin 1, 2, 3, 5, 6.
Merkitse paperiin, suoritatko 2. välikokeen vai tentin.
Välikokeessa/Tentissä saa olla oma (graafinen) laskin. Laskimen muistiin ei saa tallettaa omia muistiinpanoja. Omaa taulukkokirjaa voi käyttää; tilaisuudessa jaetaan kaavakokoelma. **Kirjoita tarvittavat välivaiheet.**

1. (6p, TENTTI) Ovatko seuraavat väittämät oikein (O) vai väärin (V)? Oikea vastaus +1p, väärä −0.5p, ei vastausta 0p. Perusteluja ei tarvita. Tehtävän kokonaispistemäärä on 0-6p.

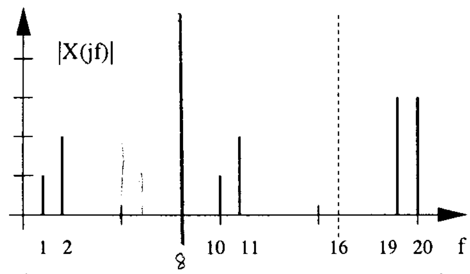
   a) Sekvenssi $x[n] = -\cos((17\pi)n + \pi/6)$ ei ole jaksollinen.
   b) Sekvenssien $x[n] = \delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2]$ ja $h[n] = \delta[n] + \delta[n-1] + 10\delta[n-2]$ konvoluutio on $y[n] = \delta[n] + 2\delta[n-1] + 12\delta[n-2] - 11\delta[n-3] - 1\delta[n-4]$.
   c) Erään ylipäästösuotimen (monotoninen päästökaista) siirtofunktio on $H(z) = K \cdot (1-0.8z^{-1})/(1+0.8z^{-1})$. Väite: Suotimen maksimi on skaalattu ykköseen, kun $K = 1/9$.
   d) Impulssi-invarianttimenetelmässä digitaalisen suotimen impulssivaste $h[n]$ saadaan näytteistämällä analogisen suotimen impulssivastetta $h(t)$.
   e) Analogisesta suotimesta $H(s) = 10/(s+10)$ bilineaarimuunnoksella saadun digitaalisen suotimen nolla on kohdassa $z = -1$ ja napa yksikköympyrän sisällä.
   f) FFT-algoritmin laskutoimitusten määrä (yleinen kompleksisuus) on $O(N \, log_2 N)$ ja DFT:ssä $O(N^2)$. Väite: Kun muunnettavan sekvenssin pituus on $N = 1024 = 2^{10}$, niin FFT on yli 500 kertaa tehokkaampi kuin DFT yleisillä kompleksisuuksilla laskettuna.

2. (6p, TENTTI) Neljä ensimmäisen asteen suodinta $H_1(z) = 1/(1-0.7z^{-1})$, $H_2(z) = 1/(1+0.7z^{-1})$, $H_3(z) = 1/(1-0.8jz^{-1})$, ja $H_4(z) = 1/(1+0.8jz^{-1})$ on asetettu kaskaadiin, jolloin saadaan suodin

$$H(z) = K \cdot H_1(z) \cdot H_2(z) \cdot H_3(z) \cdot H_4(z)$$

   a) Piirrä suotimen $H(z)$ napanollakuvio.
   b) Hahmottele amplitudivaste $|H(e^{j\omega})|$ siten, että sen maksimiarvo on yksi.
   c) Määrää kerroin K niin, että amplitudivasteen maksimi on yksi. Vinkki: Etsi kulmataajuus ω_{max} ja sijoita $z = e^{j\omega_{max}}$ yhtälöön $|H(z)| = 1$.
   d) Mikä on suotimen $H(z)$ differenssiyhtälö $x[n]$ ja $y[n]$ avulla ilmaistuna?

3. (6p, VK2, TENTTI) Tutkitaan jatkuva-aikaista reaalista signaalia $x(t)$, jonka spektri $|X(j\omega)|$ on annettu kuvassa 1. Spektrissä on positiivisilla taajuuksilla kuusi komponenttia (taajuudet kuvassa). Signaalin vaiheinformaatio on nolla läpi tehtävän.



Kuva 1: Spektri $|X(j\omega)|$ tehtävässä 3. Komponentit taajuuksilla f_i: 1, 2, 10, 11, 19, 20 kHz.

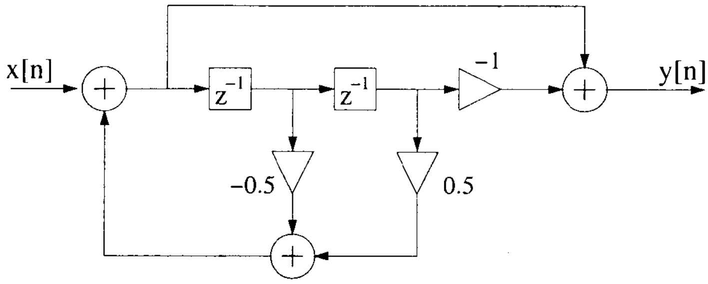
   a) Signaali $x(t)$ on jaksollinen. Mikä on sen perustaajuus f_0?
   b) Näytteistetään signaalia taajuudella $f_s = 16$ kHz. Hahmottele diskreetin sekvenssin spektri $|X(e^{j\omega})|$ välillä $0 \ldots f_s/2$.
   c) Käytä ideaalista alipäästösuodinta (anti-aliasing)

$$H(j\omega) = \begin{cases} 1, & |f| < 8\text{kHz} \\ 0, & |f| \geq 8\text{kHz} \end{cases}$$

   ja suodata $X_2(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega)$. Hahmottele spektrin itseisarvo $|X_2(j\omega)|$ välillä $-30 \ldots 30$ kHz.

d) Näytteistetään signaalia $x_2(t)$ samalla näytteenottotaajuudella $f_s = 16$ kHz, minkä jälkeen diskreettiaikainen signaali palautetaan ideaalisesti takaisin jatkuvaksi $x_r(t)$. Kirjoita $x_r(t)$ kosinifunktioiden avulla $x_r(t) = \sum_i A_i \cos(2\pi f_i t)$.

4. (6p, VK2) Tutki alla olevaa kuvan 2 suotimen lohkokaavioesitystä.



Kuva 2: Tehtävän 4 lohkokaavio

a) Mikä on suotimen siirtofunktio yksinkertaisimmassa muodossaan?

b) Laske suotimen navat ja nollat. Piirrä napanollakuvio. Onko kuvan toteutus kanoninen?

c) Laske suotimen askelvaste $s[n]$, siis vaste, kun syötteenä on askelfunktio $\mu[n]$? Mitä on $s[10]$? Mitä arvoa $s[n]$ lähestyy, kun $n \to \infty$?

5. (6p, VK2, TENTTI)

a) Piirrä ideaalisuotimen taajuusvaste $H_{ideal}(e^{j\omega})$, kun halutaan alipäästösuodin, jonka rajakulmataajuus on $\omega_c = 3\pi/5$.

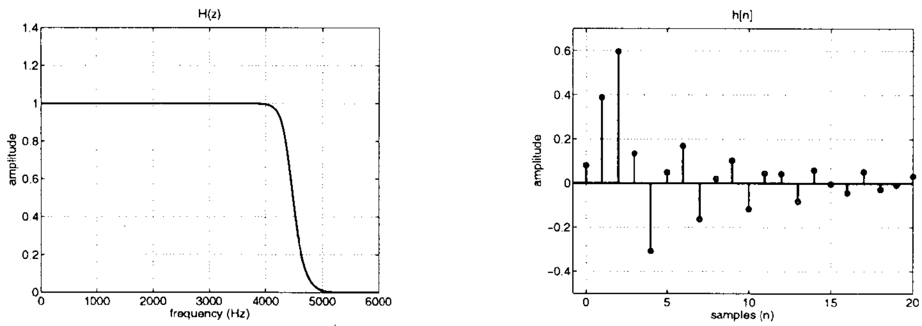
b) Laske kyseisen ideaalisen suotimen impulssivaste $h_{ideal}[n]$. Anna sen arvot, kun $n = -2 \ldots 2$. Vinkki: Käänteismuunna, jolloin saat ei-kausaalisen äärettömän pitkän impulssivasteen, joka on sinc-funktio.

c) Laske FIR-suodin ikkunamenetelmällä käyttäen suorakulmaista ikkunaa, jonka pituus on 5 ($M = 2$) $w_s[n] = 1, \quad -M \leq n \leq M$. Mikä on FIR-suotimen asteluku?

d) Tee kuten edellisessä kohdassa, mutta käytä suorakulmaisen ikkunan sijasta Hann-ikkunaa

$$w_h[n] = 0.5 \cdot \left(1 + \cos(\frac{2\pi n}{2M})\right), \quad -M \leq n \leq M$$

6. (6p, VK2, TENTTI) Olkoon käytössä kausaalinen alipäästösuodin $H(z)$, jonka päästökaista loppuu 4 kHz:iin, estokaista alkaa 5 kHz:sta ja näytteenottotaajuus on 12 kHz. Suotimen amplitudivaste on kuvassa 3(a) ja impulssivasteen $h[n]$ alku kuvassa 3(b). Halutaan muokata suodinta niin, että se voi käsitellä DAT-nauhoituksia 48 kHz:n näytteenottotaajuudella.



Kuva 3: Tehtävä 6: (a) Vasemmalla $|H(e^{j\omega})|$, (b) oikealla $h[n]$.

a) Kasvata suotimen näytteenottotaajuutta tekijällä $L = 4$. Piirrä saadun suotimen $H(z^4)$ amplitudivaste välillä $0 \ldots 24$ kHz ja impulssivasteen $h[n/4]$ ensimmäiset kymmenen arvoa.

b) Mikä toimenpide pitää vielä suorittaa, jotta $H(z^4)$ toimisi alipäästösuotimen tavoin alkuperäisten rajataajuuksien mukaisesti?