Matematiikan laitos
Teknillinen korkeakoulu

Kinnunen, Niemi

Mat-1.1040 Matematiikan peruskurssi L4, kevät 2009

3. välikoe 6.5.2009

1. Olkoon V jatkuvien funktioiden $[0,1] \to \mathbb{R}$ avaruus normilla $\|v\|_\infty = \max_{t\in[0,1]} |v(t)|$ varustettuna ja
$$(Ky)(t) = \int_0^1 k(t,s)y(s)\,ds,$$
missä $k : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ on jatkuva. Tutki ovatko seuraavat väitteet tosia vai epätosia. Jos väite on tosi, niin pelkkä vastaus riittää ja jos väite on epätosi, niin perustele vastaus lyhyesti.
   (a) V on täydellinen eli sen jokainen Cauchyn jono on suppeneva.
   (b) K on rajoitettu lineaarikuvaus $K : V \to V$.
   (c) Jos $M = \max_{t,s\in[0,1]} |k(t,s)| \le 1$, niin yhtälöllä $y = Ky + f$ on olemassa yksikäsitteinen ratkaisu kaikilla $f \in V$.
   (d) Jos ydin k on degeneroinut, eli muotoa $k(t,s) = \sum_{j=1}^n a_j(t)\overline{b_j(s)}$, niin kiinnitetyllä $\mu \in \mathbb{C}$ yhtälöllä $(I - \mu K)y = 0$ on olemassa vain triviaaliratkaisu $y = 0$.
   (e) Fredholmin alternatiivi on voimassa operaattorille $K : V \to V$.
   (f) Jos K on itseadjungoitu eli, jos $k(t,s) = \overline{k(s,t)}$, niin K:n kaikki ominaisarvot ovat reaalisia.

2. Miten diskretoisit differenssimenetelmällä reuna-arvotehtävän
$$\begin{aligned} &-u''(x) + qu(x) = f(x), \quad x \in (0,1), \\ &u(0) = u(1) = 0, \end{aligned} \tag{1}$$
missä $q \ge 0$ ja f on jatkuva? Nimeä lisäksi jokin menetelmä (suora tai iteratiivinen) syntyneen lineaarisen yhtälöryhmän ratkaisemiseksi.

3. Kun yksidimensioinen lämpöyhtälö $u_t = u_{xx}$ on diskretoitu paikkamuuttujan suhteen, on päädytty tavalliseen differentiaaliyhtälöön $\mathbf{u}_h'(t) = \mathbf{\Delta}_h \mathbf{u}_h(t)$, missä $\mathbf{\Delta}_h$:n ominaisarvojen tiedetään olevan välillä $(-4/h^2, 0)$.
   (a) Esitä jokin yksiaskelmenetelmä tämän diskretoimiseksi ajan suhteen valitsemalla aika-askel $\delta > 0$ ja merkitsemällä $\mathbf{u}_h^k$:lla $\mathbf{u}_h(k\delta)$:n approksimaatiota, missä $k = 0, 1, 2, \ldots$
   (b) Millä aika-askeleen $\delta > 0$ arvoilla menetelmäsi on stabiili eli tuottaa rajoitettuja ratkaisuja, joille $\mathbf{u}_h^k \to \mathbf{0}$, kun $k \to \infty$? Perustele.
   Vihje: $\lim_{k\to\infty} \mathbf{B}^k = \mathbf{0} \iff |\lambda| < 1$ kaikilla $\mathbf{B}$:n ominaisarvoilla λ.

4. Tarkastellaan reuna-arvotehtävää (1), kun $q = 0$.
   (a) Millainen on tehtävän variaatioformulaatio? Entä miten määritellään sen ratkaisun u Ritz-Galerkin approksimaatio u_h?
   (b) Mitataan virhettä $u - u_h$ normilla
$$|||u - u_h|||^2 = \langle u' - u_h', u' - u_h' \rangle = \int_0^1 \left(u'(x) - u_h'(x)\right)^2 dx.$$
   Osoita, että
$$|||u - u_h|||^2 = |||u|||^2 - |||u_h|||^2.$$
   Geometrinen tulkinta?

Mat-1.1040 3. välikoe 6.5.2009

1. (a) Tosi on (Lause 6.1).

(b) Tosi on (Esimerkki 6.11).

(c) Epätosi, koska esim. mikä tahansa vakiofunktio toteuttaa yhtälön $y(t) = \int_0^1 y(s)\,ds$.

[HUOM! PERUSTELUSSA TULI ANTAA VASTAESIMERKKI]

(d) Epätosi, koska esim. ydin $k(t,s) = 1$ on degeneroitunut.

(e) Tosi on (Lause 6.19).

(f) Tosi on (Lause 6.26).

2. Jaetaan väli $[0,1]$ pisteisiin $x_j = jh$, missä $h = 1/(m+1)$, $m = 0, 1, \ldots, m+1$. Merkitään $u_j \approx u(x_j)$ ja käytetään toiselle derivaatalle keskusdifferenssiapproksimaatiota

$$u''(x_j) = \frac{1}{h^2}(u_{j-1} - 2u_j + u_{j+1}) + O(h^2).$$

Huomioimalla reunaehdot $u_0 = u_{m+1} = 0$ saadaan yhtälöryhmä

$$-\frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} -2 & 1 & & & \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & -2 & 1 \\ & & & 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{m-1} \\ u_m \end{bmatrix} + Q\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \\ & & & & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{m-1} \\ u_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_m) \end{bmatrix}$$

2, (jatko). Syntynyt yhtälöryhmä voidaan ratkaista esim. Gaussin eliminointimenetelmällä (LU-hajotelma) tai (iteratiivisesti) liittogradienttimenetelmällä. (1-2

3. (a) Euler: $\underline{u}_h^{k+1} = \underline{u}_h^k + \delta \underline{\underline{\Delta}}_h \underline{u}_h^k$

Impl. Euler: $\underline{u}_h^{k+1} = \underline{u}_h^k + \delta \underline{\underline{\Delta}}_h \underline{u}_h^{k+1}$

Trapetsi: $\underline{u}_h^{k+1} = \underline{u}_h^k + \frac{1}{2}\delta \underline{\underline{\Delta}}_h (\underline{u}_h^k + \underline{u}_h^{k+1})$

(b). Euler: $$\underline{u}_h^k = \underbrace{(\underline{\underline{I}} + \delta \underline{\underline{\Delta}}_h)}_{\doteq \underline{\underline{B}}^k}{}^k \underline{u}_h^0$$

$$\sigma(B) \subset (-1,1] \iff 1 - \delta \cdot \frac{4}{h^2} > -1 \iff \underline{\underline{\delta < \frac{h^2}{2}}}$$

IE: $$\underline{u}_h^k = \underbrace{(\underline{\underline{I}} - \delta \underline{\underline{\Delta}}_h)^{-k}}_{\doteq \underline{\underline{B}}^k} \underline{u}_h^0$$

$$\sigma(B) \subset (-1,1) \iff \frac{1}{1-\delta \underset{(-4/h^2,0)}{\underset{\in}{\lambda}}} < 1 \iff \underline{\underline{\delta > 0}}$$

Trapetsi l. implisiittinen kp. sääntö l. Crank-Nicolson:

$$\underline{u}_h^k = \underbrace{(\underline{\underline{I}} - \tfrac{\delta}{2} \underline{\underline{\Delta}}_h)^{-k} (\underline{\underline{I}} + \tfrac{\delta}{2} \underline{\underline{\Delta}}_h)^k}_{\doteq \underline{\underline{B}}^k} \underline{u}_h^0$$

$$\sigma(B) \subset (-1,1) \iff \left(1 + \tfrac{\delta}{2}\lambda\right)^2 < \left(1 - \tfrac{\delta}{2}\lambda\right)^2 \iff \underline{\underline{\delta > 0}}$$

4. (a) Kerrotaan yhtälö $f = -u''$ puolittain testifunktiolla $v \in W = \{v \in C^1[0,1] \mid v(0) = v(1) = 0\}$ ja osittaisintegroidaan:

$$\int_0^1 f v \, dx = \int_0^1 -u'' v \, dx = \int_0^1 u' v' \, dx - \cancel{\Big/_0^1 u' v}^{\,0}$$

$$= \int_0^1 u' v' \, dx.$$

Variaatiomuoto on siis: etsi $u \in W$ s.e.

$$\langle u', v' \rangle = \int_0^1 u' v' \, dx = \int_0^1 f v \, dx = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in W.$$

Tämä on hyvin asetettu energia-avaruudessa

$$V = \{ v \in H^1(0,1) \mid v(0) = v(1) = 0 \}.$$

Galerkin-approksimaatio saadaan valitsemalla Ville äärellisulotteinen aliavaruus $V_h \subset V$ ja etsimällä $u_h \subset V_h$ s.e.

$$\langle u_h', v' \rangle = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in V_h.$$

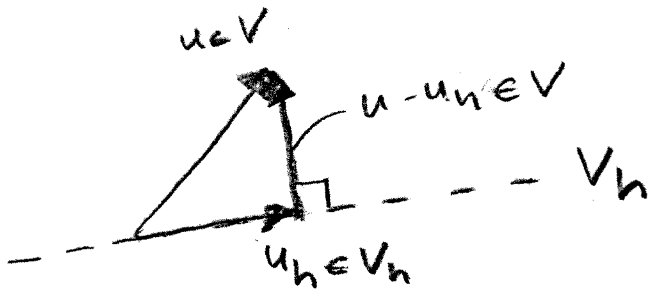
(b) Koska $\langle u' - u_h', v' \rangle = 0 \quad \forall v \in V_h$, niin

$$\langle u_h', u' - u_h' \rangle = 0 = \langle u_h' - u', u_h' \rangle,$$

joten

$$\begin{aligned}
|||u - u_h|||^2 &= \langle u' - u_h', u' - u_h' \rangle \\
&= \langle u', u' \rangle - \langle u', u_h' \rangle - \langle u_h', u' - u_h' \rangle \\
&= \langle u', u' \rangle - \langle u' + u_h' - u', u_h' \rangle \\
&= \langle u', u' \rangle - \langle u_h', u_h' \rangle = |||u|||^2 - |||u_h|||^2
\end{aligned}$$

4. (jatko) Geometrinen tulkinta:



Galerkin-approksimaatio u_h on u:n ortogonaaliprojektio aliavaruudelle V_h energianormin $|||\cdot|||$ mielessä eli paras mahdollinen approksimaatio (tässä suhteessa).