Aalto-yliopiston teknillinen korkeakoulu Alestalo/Seiskari
Matematiikka

Mat-1.1310 Matematiikan peruskurssi K1

2. välikoe 15.10.2010 klo 16–19.

Kaikki yo-kokeessa hyväksytyt laskimet ovat sallittuja.

1. Laske $\det A$, $B^2 = BB$ ja B^{-1}, kun

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \\ 5 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 7 & 8 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

2. Olkoon

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) Määritä ortogonaalisessa diagonalisoinnissa $A = PDP^T$ esiintyvät matriisit P ja D.
b) Voiko neliömuoto $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ saada negatiivisia arvoja joillakin vektoreilla $\mathbf{x} = [x, y, z]^T$?

3. a) Määritä raja-arvot

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(2x)}{x} \quad \text{ja} \quad \lim_{x\to\infty} (\sqrt{x^2+2x} - \sqrt{x^2+x}\,).$$

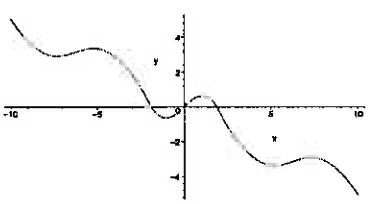
Vihje jälkimmäiseen: Kerro lausekkeella a/a, kun $a = \sqrt{x^2+2x} + \sqrt{x^2+x}$.
b) Laske $f'(x)$, $f''(x)$ ja $g'(x)$, kun

$$f(x) = \cos(5x^2) \quad \text{ja} \quad g(x) = \frac{1+2x}{1-2x}.$$

4. a) Osoita väliarvolauseen avulla, että

$$|\sin(3a) - \sin(3b)| \leq 3|a-b|$$

kaikilla $a, b \in \mathbf{R}$.
b) Yhtälö $2\sin x + \sin y = x + 2y$ määrää yksikäsitteisen implisiittifunktion $y = y(x) \colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, vrt. kuva. Määritä pienin sellainen $x_0 > 0$, että $y'(x_0) = 0$. Arvoa $y_0 = y(x_0)$ ei tarvitse laskea.



3. a) $$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(2x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos(2x)} = 2 \cdot 1 = \underline{\underline{2}}$$

$$\sqrt{x^2+2x} - \sqrt{x^2+x} = \frac{x^2+2x-(x^2+x)}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2+x}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2+x}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+2/x}+\sqrt{1+1/x}} \to \frac{1}{1+1} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}, \quad \text{kun } x \to \infty$$

b) $$f'(x) = -\sin(5x^2)\cdot 10x = \underline{\underline{-10x\sin(5x^2)}}$$

$$f''(x) = -10\sin(5x^2) - 10x\cdot\cos(5x^2)\cdot 10x$$
$$= \underline{\underline{-10\sin(5x^2) - 100x^2\cos(5x^2)}}$$

$$g'(x) = \frac{2\cdot(1-2x)-(-2)(1+2x)}{(1-2x)^2} = \underline{\underline{\frac{4}{(1-2x)^2}}}, \quad x \neq \frac{1}{2}$$

---

4. a) $f(x) = \sin(3x)$, $f'(x) = 3\cos(3x)$

$$\Rightarrow \sin(3a) - \sin(3b) = 3\cos(3\xi)\cdot(a-b), \quad \xi \in [a,b]$$

$$\Rightarrow |\sin(3a) - \sin(3b)| = 3\underbrace{|\cos(3\xi)|}_{\leq 1}\cdot|a-b| \leq 3|a-b| \text{ aina.}$$

b) $$2\sin x + \sin y = x + 2y \Rightarrow 2\cos x + \cos y(x)\cdot y'(x) = 1 + 2y'(x)$$

Sij. $x = x_0$, $y'(x_0) = 0 \Rightarrow 2\cos x_0 = 1 \Leftrightarrow \cos x_0 = 1/2$

Pienin positiivinen ratkaisu on $\underline{\underline{x_0 = \pi/3}}$

K1, VK2/2010 RATKAISUT/PJA

1

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \\ 5 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 7 & 8 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 6 \\ 0 & 7 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -6 \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-7) \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -6 \cdot 24 + 2 \cdot (-7) \cdot (-20)$$

$$= \underline{\underline{136}}$$

$$BB = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 8 & 14 \end{bmatrix}}}$$

$$[B \mid I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] (-2)\ (-3)$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] (-2) \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] = [I \mid A^{-1}]$$

---

2. a)
$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda\left((1-\lambda)^2 - 1\right) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 = -\lambda^2(\lambda-2)$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = 2$$

Om. vektorit: $\bar{v}_1 = [1,0,-1]^T$, $\bar{v}_2 = [0,1,0]^T$, $\bar{v}_3 = [1,0,1]^T$ (esim.)

$$|\bar{v}_1| = \sqrt{2}, \ |\bar{v}_2| = 1, \ |\bar{v}_3| = \sqrt{2} \Rightarrow D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \ P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

b)
$$\bar{x}^T A \bar{x} = x^2 + 2xz + z^2 = (x+z)^2 \geq 0 \text{ AINA} \Rightarrow \underline{\underline{\text{EI VOI}}}$$

TAI $\bar{x}^T A \bar{x} = \ldots = 2 \cdot z'^2 \geq 0$ AINA