K1 3. välikoe: Malliratkaisu tehtävään 1

(a)

Sijoitetaan annettuun raja-arvoon x:n paikalle 0, ja katsotaan mitä tapahtuu:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin x} - \cos(2x)}{\sin(3x)} = \frac{e^0 - 1}{0} = \frac{0}{0}$$

Koska sekä osoittaja että nimittäjä lähestyvät nollaa, kun x lähestyy nollaa, voidaan käyttää L'Hôpitalin sääntöä:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Derivoidaan siis sekä osoittaja että nimittäjä, ja lasketaan raja-arvo tämän jälkeen normaalisti sijoituksella:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin x} - \cos(2x)}{\sin(3x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x \, e^{\sin x} + 2\sin(2x)}{3\cos(3x)} = \frac{1 \cdot e^0 + 2 \cdot 0}{3 \cdot 1} = \underline{\frac{1}{3}}$$

(b)

Tutkitaan, onko yhtälöllä $\ln x = 1/x$ yksikäsitteistä ratkaisua välillä $x \in [1,2]$. Merkitään $f(x) = \ln x - 1/x$, jolloin alkuperäisellä yhtälöllä on yksikäsitteinen ratkaisu annetulla välillä, mikäli $f(x)$:llä on tasan yksi nollakohta tällä välillä. Katsotaan, mitkä arvot $f(x)$ saa välin päätepisteissä:

$$f(1) = \ln 1 - \frac{1}{1} = 0 - 1 = -1$$
$$f(2) = \ln 2 - \frac{1}{2} \approx 0,19$$

Funktiolla on siis ainakin yksi nollakohta välillä [1,2]. Jotta nollakohtia olisi vain yksi, täytyy funktion olla aidosti monotoninen tällä välillä. Tutkitaan funktion derivaattaa:

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{-1}{x^2} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$$

Koska $f'(x) > 0$ koko välillä $x \in [1,2]$, $f(x)$ on aidosti kasvava tällä välillä. $f(x)$:llä on siis tasan yksi nollakohta välillä $x \in [1,2]$, joten annetulla yhtälöllä on yksikäsitteinen ratkaisu tällä välillä.

Kiintopisteiteraatiota varten muokataan yhtälö muotoon $x = g(x)$:

$$\ln x = \frac{1}{x} \Leftrightarrow e^{\ln x} = e^{x^{-1}} \Leftrightarrow x = e^{x^{-1}}$$

tai

$$\ln x = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = \frac{1}{\ln x}$$

Nyt voidaan käyttää kiintopisteiteraatiota $x_{n+1} = g(x_n)$ yhtälön ratkaisun etsimiseen. Valitaan $g(x) = e^{x^{-1}}$, sillä tätä muotoa käytettäessä iteraatio suppenee (jos valitaan $g(x) = \frac{1}{\ln x}$, iteraatio hajaantuu). Otetaan alkuarvaukseksi välin päätepiste, eli $x_0 = 1,5$, ja aloitetaan iteraatio:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= g(x_0) = e^{1/x_0} \approx 1,9477 \\
x_2 &= g(x_1) = e^{1/x_1} \approx 1,6710 \\
x_3 &= g(x_2) = e^{1/x_2} \approx 1,8193 \\
&\dots \\
x_8 &= g(x_7) = e^{1/x_7} \approx 1,7600 \\
x_9 &= g(x_8) = e^{1/x_8} \approx 1,7650 \\
x_10 &= g(x_9) = e^{1/x_9} \approx 1,7622
\end{aligned}
$$

Ratkaisun kaksidesimaalinen likiarvo on siis $x \approx 1,76$.

Tehtävän 1 pisteytys

(a)

- Tajuttu käyttää L'Hôpitalin sääntöä, eli joko mainittu säännön nimi tai vähintäänkin kirjoitettu selkeästi näkyville "$\frac{0}{0}$" ennen derivointia. Pelkkä derivointi suoraan ei riitä. $\Rightarrow$ **1 p**
- Derivaatat oikein $\Rightarrow$ **1 p**
- Tulos oikein $\Rightarrow$ **1 p**
- Pieni derivointivirhe $\Rightarrow$ **Yht. 2 p**

(b)

- Osoitettu yksikäsitteisen ratkaisun olemassaolo. Tähän vaaditaan sekä ratkaisun olemassaolon toteaminen ($f(x)$ saa erimerkkiset arvot välin päätepisteissä tjsp.) että ratkaisun yksikäsitteisyyden toteaminen ($f(x)$ aidosti monotoninen ko. välillä tjsp.). $\Rightarrow$ **1 p**
- Valittu oikea kiintopistemuoto, ja kirjoitettu iteroinnin idea selkeästi näkyville. Esim. $x_{n+1} = e^{x_n^{-1}}$. Pelkkä lista iteroinnissa saatavia arvoja, joista ei käy selville, miten ne lasketaan, ei riitä. $\Rightarrow$ **1 p**
- Tulos oikein $\Rightarrow$ **1 p**

TEHT. 2 $y = e^{-x},\ x \geq 0$

a) $V = \pi \int_0^\infty (e^{-x})^2\,dx = \pi \int_0^\infty e^{-2x}\,dx = -\frac{\pi}{2} \Big/_0^\infty e^{-2x} = -\frac{\pi}{2}(0-1) = \underline{\underline{\frac{\pi}{2}}}$ 1p 1p 1p

b) $A = 2\pi \int_0^\infty e^{-x}\sqrt{1+(-e^{-x})^2}\,dx$ 1p SIJ. $e^{-x} = \sinh u$

$$\begin{cases} \Leftrightarrow x = -\ln(\sinh u) \\ \Leftrightarrow u = \ln\left(e^{-x}+\sqrt{1+e^{-2x}}\right) \\ \Rightarrow dx = -\dfrac{\cosh u}{\sinh u}\,du \\ x = 0 \Rightarrow u = \operatorname{ar\,sinh} 1 \\ \qquad = \ln(1+\sqrt{2}) \equiv a \\ x \to \infty \Rightarrow u \to \ln 1 = 0 \end{cases}$$

1p jos ok

$= 2\pi \int_a^0 \sinh u \sqrt{1+\sinh^2 u}\cdot\left(-\frac{\cosh u}{\sinh u}\right)du$

$= 2\pi \int_0^a \sqrt{\cosh^2 u}\,\cosh u\,du$

$= 2\pi \int_0^a \cosh^2 u\,du$

$= 2\pi \int_0^a \frac{1}{4}\left(e^u + e^{-u}\right)^2 du = \frac{\pi}{2}\int_0^a \left(e^{2u} + 2 + e^{-2u}\right)du$

$= \frac{\pi}{2} \Big/_0^a \left(\frac{1}{2}e^{2u} + 2u - \frac{1}{2}e^{-2u}\right)$ 1p $\quad \Big|\ e^{2a} = (e^a)^2 = (1+\sqrt{2})^2$

$= \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2}(1+\sqrt{2})^2 + 2\ln(1+\sqrt{2}) - \frac{1}{2}(1+\sqrt{2})^{-2} - \left(\frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{2}\right)\right)$

$= \frac{\pi}{4}\left(1 + 2\sqrt{2} + 2 + 4\ln(1+\sqrt{2}) - (\sqrt{2}-1)^2\right) \quad \Big|\ \frac{1}{1+\sqrt{2}} = \frac{1-\sqrt{2}}{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})} = \sqrt{2}-1$

$= \frac{\pi}{4}\left(3 + 2\sqrt{2} + 4\ln(1+\sqrt{2}) - 2 + 2\sqrt{2} - 1\right)$

$= \underline{\underline{\pi\sqrt{2} + \pi\ln(1+\sqrt{2})}}$ 1p (LOPPUSIEVENNYKSIÄ EI VAADITA)

max 6p

K1 3. välikoe: Malliratkaisu tehtävään 3

Lasketaan integraali

$$\int_0^\pi x^2 \sin x \, dx$$

osittaisintegroinnin avulla. Osittaisintegrointikaava on

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = \Big/_{\!a}^{\,b} f(x)g(x) - \int_a^b f(x)g'(x)dx$$

Valitaan $f'(x) = \sin x$ ja $g(x) = x^2$, jolloin $f(x) = -\cos x$ ja $g'(x) = 2x$. Nyt

$$\int_0^\pi x^2 \sin x \, dx = -\Big/_{\!0}^{\,\pi} x^2 \cos x + \int_0^\pi 2x \cos x \, dx$$

Käytetään jäljelle jääneeseen integraaliin $2\int_0^\pi x \cos x \, dx$ osittaisintegrointikaavaa uudestaan. Valitaan nyt $f'(x) = \cos x$ ja $g(x) = x$, jolloin $f(x) = \sin x$ ja $g'(x) = 1$:

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi x^2 \sin x \, dx &= -\Big/_{\!0}^{\,\pi} x^2 \cos x + 2\Big/_{\!0}^{\,\pi} x \sin x - 2\int_0^\pi \sin x \, dx \\
&= -[\pi^2 \cos \pi - 0] + 2[\pi \sin \pi - 0] + 2\Big/_{\!0}^{\,\pi} \cos x \\
&= \pi^2 + 2[\cos \pi - \cos 0] = \pi^2 + 2 \cdot (-2) = \underline{\underline{\pi^2 - 4}}
\end{aligned}$$

Tehtävän 3 pisteytys

- Tajuttu käyttää osittaisintegrointia, eli osittaisintegrointikaava on näkyvillä <u>oikein</u>, tai muuten selkeästi alettu osittaisintegroimaan oikein $\Rightarrow$ **2 p**
- 1. osittaisintegrointi oikein $\Rightarrow$ **2 p**
- 2. osittaisintegrointi ja lopputulos oikein $\Rightarrow$ **2 p**
- Pieni merkki-, derivointi-, tai muu huolimattomuusvirhe $\Rightarrow$ **-1 p**
- Käytetyssä "osittaisintegrointikaavassa" miinuksen sijasta plussa, muuten oikein $\Rightarrow$ **-1 p**
- Muuten väärin, mutta "hyvä yritys" $\Rightarrow$ **Yht. 1 p**

KI VK3 SL 2009

t4 a) $\int_0^1 \frac{dx}{1+3x} = \Big/_0^1 \frac{1}{3} \ln|1+3x|$ 2p

$= \frac{1}{3}(\ln 4 - \ln 1) = \underline{\underline{\frac{1}{3}\ln 4}}$ 1p

b) $\frac{1}{(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2)+B(x-2)}{(x+2)(x-2)}$

Saatiin osamurtohajotelma $= \frac{x(A+B)+2A-2B}{(x+2)(x-2)}$

$\frac{1}{(x-2)(x+2)} = \frac{\frac{1}{4}}{x-2} - \frac{\frac{1}{4}}{x+2}$

$\Rightarrow \begin{cases} A+B=0 & \to A=-B \\ 2A-2B=1 & \to -4B=1 \end{cases}$

1p $\begin{cases} B=-\frac{1}{4} \\ A=\frac{1}{4} \end{cases}$

$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{(x-2)(x+2)} = \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x-2} - \frac{1}{4}\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x+2}$

$= \frac{1}{4}\left[\Big/_{-1}^{1} \ln|x-2| - \Big/_{-1}^{1} \ln|x+2|\right]$ 1p

$= \frac{1}{4}\left[\ln 1 - \ln 3 - (\ln 3 - \ln 1)\right]$

$= \frac{1}{4}(-2\ln 3)$

$= \underline{\underline{-\frac{\ln 3}{2}}}$ +1p

max 6p