

4. a) Kirjoita Lagrangen funktio minimointitehtävälle, jossa minimoidaan funktio $f(x, y) = x^2 + y^4 + z^6$ rajoitusehdoilla $x + y = 1$ ja $y^2 + z^2 = 8$.
 b) Etsi ja luokittele funktion $f(x, y) = (x - y)^2 + (x + y - 2)^2 + 5x - 2y + 1$ ääriarvokohdat (kriittiset pisteet).

5. a) Laske integraali

$$I = \int_0^1 \int_0^1 x^2 y^3 dx dy.$$

- b) Laske epäoleellinen integraali $I = \int_0^\infty \int_{-x}^x e^{-x^2} dy dx$ ja hahmottele integrointialue. Miksi kyseinen integraali on epäoleellinen?

6. Laske funktion $f(x, y) = x^2 + y^2$ integraalikeskiarvo kolmiossa T , jonka kärjet ovat pisteissä $(0, 0)$, $(1, 0)$ ja $(1, 1)$.

7. Kappaleen D hitausmomentti z -akselin suhteen saadaan integraalista

$$I_z = \iiint_D (x^2 + y^2) \delta dV,$$

missä δ on tiheys. Laske epäyhtälön $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$, missä $a > 0$, määräämän vakioitiheyksisen ($\delta = \delta_0 = \text{vakio}$) pallon hitausmomentti z -akselin suhteen.

8. Määritä Helix-käyrän

$$\mathbf{r} = a \cos t \mathbf{i} + a \sin t \mathbf{j} + bt \mathbf{k}$$

pisteitä $(a, 0, 0)$ ja $(a, 0, 2\pi b)$ yhdistävän osan kaarenpituus.

9. Laske viivaintegraali

$$\oint_C (x^2 - y^4) dx + (x - y^3) dy,$$

kun C on epäyhtälöiden $x^2 + y^2 \leq a^2$, $x, y \geq 0$ määräämä kiekon neljänneksen reuna positiiviseen suuntaan kierrettynä.

Vihje. Voit käyttää hyväksesi Greenin kaavaa

$$\iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x} F_2 - \frac{\partial}{\partial y} F_1 \right) dA = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

10. Etsi differentiaaliyhtälön

$$y' = x^2 y^2$$

yleinen ratkaisu.

11. Ratkaise alkuarvo-ongelma

$$y'' + y' = e^x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

12. Tutki sopivaa testiä käyttämällä, suppeneeko sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\pi^n}.$$

Entä suppeneeko kyseinen sarja itseisesti?