Aalto-yliopiston teknillinen korkeakoulu Alestalo/Seiskari
Matematiikka

Mat-1.1310 Matematiikan peruskurssi K1

3. välikoe 13.12.2010 klo 9–12.

Kaikki yo-kokeessa hyväksytyt laskimet ovat sallittuja.

1. a) Esitä funktion $\sinh x$ määritelmä ja osoita, että funktio on aidosti kasvava koko reaaliakselilla. Muodosta käänteisfunktion $\sinh^{-1} x = \operatorname{ar\,sinh} x$ lauseke logaritmin avulla lausuttuna.
   b) Laske Neperin luvun e likiarvo soveltamalla Newtonin menetelmää yhtälöön $\ln x - 1 = 0$ alkuarvolla $x_0 = 1$. Monellako askeleella saadaan oikea viisidesimaalinen likiarvo 2,71828?

2. a) Määritä raja-arvo
$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{\sin(\pi x)}.$$
   b) Käyrän $y = xe^{-x}$ ja x-akselin rajaamasta alueesta leikataan pystysuora viipale suorilla $x = t$ ja $x = t + 1$. Millä arvolla $t > 0$ tämä pinta-ala
$$A(t) = \int_0^{t+1} xe^{-x}\,dx - \int_0^t xe^{-x}\,dx$$
   on suurin mahdollinen? Vihje: Voit välttää integroinnit käyttämällä analyysin peruslausetta derivaatan $A'(t)$ laskemiseen.

3. Tarkastellaan paraabelia $y = 1 - x^2$ välillä $[-1, 1]$.
   a) Laske sen kappaleen tilavuus, joka syntyy paraabelin pyörähtäessä x-akselin ympäri.
   b) Laske paraabelin kaarenpituuden likiarvo trapetsisäännöllä, kun jakovälejä on neljä.
   c) Piirrä kuvio b-kohdan approksimaatiosta ja päättele sen avulla, onko saatu likiarvo suurempi vai pienempi kuin tarkka arvo.
   Lisätieto: $T_n = h(y_0/2 + y_1 + \cdots + y_{n-1} + y_n/2)$.

4. Laske integraali
$$\int_0^4 \frac{dt}{(\sqrt{t} - 3)(\sqrt{t} - 4)}\,dt$$
   sijoittamalla aluksi $t = x^2$.

Huom: Yhden välikokeen voi uusia tentin yhteydessä 13.1.2011, jolloin parempi tulos jää voimaan. **Myös kaikkien uusintavälikokeeseen osallistuvien täytyy ilmoittautua tenttiin!** Tentti ja välikoeuusinnat ovat samalla paperilla ja niistä voi valita yhden välikokeen tai tentin.

K1, VK3 /2010 RATKAISUT / PJA

1. a) $\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$

$D \sinh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ aidosti kasvava

$y = \sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \; \Big| \cdot 2e^x \iff (e^x)^2 - 2y\,e^x - 1 = 0$

$\iff e^x = \dfrac{2y \pm \sqrt{4y^2+4}}{2} = y \underset{(-)}{\pm} \sqrt{1+y^2}$ (– EI KÄY, KOSKA $e^x > 0 \; \forall x$)

$\Rightarrow \operatorname{ar\,sinh} x = \underline{\underline{\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)}}$

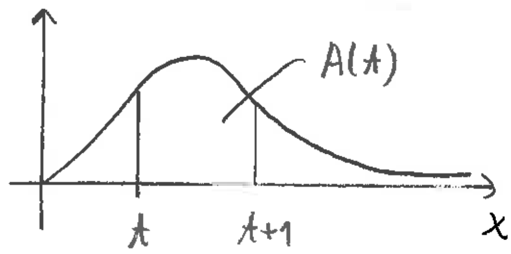
b) $f(x) = \ln x - 1$, $\quad x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \dfrac{\ln x_n - 1}{1/x_n} = 2x_n - x_n \ln x_n$

$x_0 = 1$, $x_1 = 2\cdot 1 - 1\cdot \ln 1 = 2$, $x_2 = 2\cdot 2 - 2\ln 2 \approx 2{,}6137056$

$x_3 \approx 2{,}7162439$, $\underline{\underline{x_4 \approx 2{,}71828}}$

---

2. a) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{\sin(\pi x)} \underset{(0/0)}{=} \lim_{x\to 1} \frac{1/x}{\pi \cos(\pi x)} = \frac{1/1}{\pi \cos \pi} = \underline{\underline{-1/\pi}}$ L'Hospital



b)

$A'(t) = (t+1)\,e^{-(t+1)} - t\,e^{-t}$

$= e^{-t}\left(\dfrac{t+1}{e} - t\right) = 0$, jos

$t + 1 = et \iff t = \dfrac{1}{e-1}$

Merkkikaavion (tai $A''(t) < 0$) perusteella kyseessä on maksimi (sen päättelee myös kuvasta!)

Siis: $\underline{\underline{t = \dfrac{1}{e-1}}}$

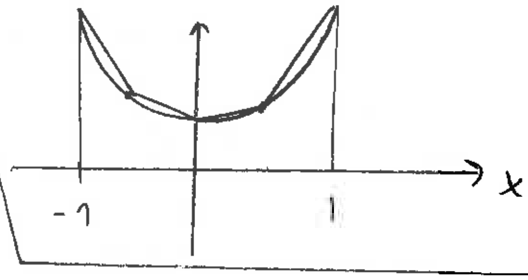
3. a) $V = \pi \int_{-1}^{1} f(x)^2 \, dx = \pi \int_{-1}^{1} (1-x^2)^2 \, dx = \pi \int_{-1}^{1} (1 - 2x^2 + x^4) \, dx$

$$= \pi \Big/_{-1}^{1} \left(x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 \right) = 2\pi \left(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} \right) = \underline{\underline{\frac{16\pi}{15}}}$$

b) $l = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + f'(x)^2} \, dx = \int_{-1}^{1} \sqrt{1+4x^2} \, dx \approx T_4$, missä

$$T_4 = 0{,}5 \cdot \left(\sqrt{1+4\cdot(-1)^2}/2 + \sqrt{1+4\cdot(-1/2)^2} + \sqrt{1+4\cdot 0^2} + \sqrt{1+4\cdot(1/2)^2} + \sqrt{1+4\cdot 1^2}/2 \right) = 0{,}5 \cdot \left(\sqrt{5} + 2\sqrt{2} + 1 \right) \approx \underline{\underline{3{,}032}}$$

c) Integroitava funktio $\sqrt{1+4x^2}$ on kupera, joten puolisuunnikasappr. on sen kuvaajan yläpuolella $\Rightarrow$ <u>likiarvo on suurempi kuin tarkka arvo</u>



4. $t = x^2 \Rightarrow dt = 2x \, dx$

$x = \sqrt{t}$; $t = 0 \Rightarrow x = \sqrt{0} = 0$

$t = 4 \Rightarrow x = \sqrt{4} = 2$

$$\Rightarrow \int_0^4 \frac{dt}{(\sqrt{t}-3)(\sqrt{t}-4)} = \int_0^2 \frac{2x}{(x-3)(x-4)}$$

$$\frac{2x}{(x-3)(x-4)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-4}$$

$\Rightarrow A = -6$, $B = 8$

$$= \Big/_0^2 \left(8 \ln|x-4| - 6 \ln|x-3| \right)$$

$$= 8 \ln 2 - 6 \underbrace{\ln 1}_{=0} - \left(8 \underbrace{\ln 4}_{2\ln 2} - 6 \ln 3 \right) = \underline{\underline{6 \ln 3 - 8 \ln 2}}$$