

Mat-1.1210 Matematiikan peruskurssi S1

3. välikoe 13.12.2010

Täytä selvästi *jokaiseen vastauspaperiin* kaikki otsaketiedot. Merkitse kuulustelukoodi-kohtaan opintojakson numero, nimi ja onko kyseessä tentti vai välikoe. *-kohta jätetään tyhjäksi. Koulutusohjelmakoodit ovat ARK, AUT, EST, INF, KEM, KON, MAA, MAK, MAR, PUU, RYK, TFY, TIK, TLT, TUO.

Kokeessa saa käyttää ylioppilaskokeessa sallittuja laskimia.
Koeaika on 3h.

1. Tarkastellaan differentiaaliyhtälösystemiä $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t)$, jossa $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Onko mahdollista valita alkuehto $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ siten, että ratkaisu kasvaa rajattomasti kun $t \rightarrow \infty$? Jos mahdollista, anna esimerkki tällaisesta alkuarvosta \mathbf{x}_0 .

2. a) Laske raja-arvo

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - x^2 \cos \frac{1}{x})$$

- b) Laske joko l'Hospitalin säännöllä tai Taylorin polynomilla raja-arvo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\ln(1-x)}$$

3. a) Laske määrämätön integraali (eli "antiderivaatta")

$$\int \frac{5-x}{2x^2+x-10} dx.$$

- b) Laske integraalit

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cos x \, dx \quad \text{ja} \quad \int_0^{2\pi} x^2 \sin^2 x \, dx.$$

Vihje: Jälkimmäisessä tapauksessa lausu $\sin^2 x$ funktion $\cos 2x$ avulla tunnettua trigonometrian kaavaa käyttäen.

4. Ratkaise Laplace-muunnoksen avulla alkuarvot tehtävä $x'(t) - 9x(t) = \sin 2t$, $x(0) = 0$.

Vihje: Tarvittavia Laplace-muunnoskaavoja koepaperin kääntöpuolella.

Funktio $f(t), t \geq 0$

Laplace-muunnos $\hat{f}(s)$

1	$\frac{1}{s}$ kun $s > 0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$ kun $s > \max(0, a)$
$\sin bt; b \in \mathbb{R}$	$\frac{b}{s^2 + b^2}$ kun $s > 0$
$\cos bt; b \in \mathbb{R}$	$\frac{s}{s^2 + b^2}$ kun $s > 0$
$t^n; n \in \mathbb{N}$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$ kun $s > 0$
$t^n e^{at}; n \in \mathbb{N}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$ kun $s > \max(0, a)$
$e^{at} \sin bt; a, b \in \mathbb{R}$	$\frac{b}{(s-a)^2 + b^2}$ kun $s > 0$
$e^{at} \cos bt; a, b \in \mathbb{R}$	$\frac{s-a}{(s-a)^2 + b^2}$ kun $s > 0$.