Aalto-yliopisto, Matematiikan laitos — Peltonen, Eirola / Raita
Mat-1.1030, Matematiikan peruskurssi L 3
1. välikoe, 12. 10. 2010

Kirjoita selvästi jokaiseen koepaperiin kysytyt tiedot!

1. Missä kompleksitason pisteissä kuvaus
$$z \mapsto \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$
on
   (a) derivoituva,
   (b) analyyttinen,
   (c) konforminen?
   (d) Määrää kuvauksen derivaatta niissä kompleksitason pisteissä, joissa derivaatta on olemassa.
   (e) Mikä on yksikköympyrän $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ kuvajoukko?

2. (a) Määrää eksponenttifunktion $z \mapsto e^z$ antama kuvajoukko alueesta $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z < 0 \text{ ja } \operatorname{Im} z \in (0, 2\pi)\}$.
   (b) Etsi Möbius-kuvaus M, joka kuvaa yksikkökiekon $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ alemmaksi puolitasoksi $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z < 0\}$ siten, että $M(1) = 0$.
   (c) Etsi konformikuvaus, joka kuvaa tason ensimmäisen neljänneksen $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0 \text{ ja } \operatorname{Re} z > 0\}$ alueeksi $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0 \text{ ja } \operatorname{Im} z \in (2\pi, 3\pi)\}$.

3. Määrää seuraavien integraalien arvot
   (a) $\oint_\gamma \frac{\sin(e^z)}{z} dz$,
   (b) $\oint_\gamma \frac{\sin(e^z)}{z^2} dz$,
   (c) $\oint_\gamma \frac{\sin(e^z)}{e^{\sin z}} dz$,

   kun γ parametrisoi ympyrän $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ yhden kerran positiiviseen kiertosuuntaan.

4. Muodosta funktion
$$z \mapsto \frac{z^2 - 2z + 3}{z - 2}$$
Laurentin kehitelmä alueessa
   (a) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - 1| < 1\}$,
   (b) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - 1| > 1\}$.

Aalto-yliopisto, Matematiikan laitos Peltonen, Eirola / Raita
Mat-1.1030, Matematiikan peruskurssi L 3
1. välikoe, 12. 10. 2010

Fyll i den efterfrågade informationen på varje provpapper!

1. I vilka punkter i komplexa talplanet är avbildningen som ges av
$$z \mapsto \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$
   (a) deriverbar,
   (b) analytisk,
   (c) konform?
   (d) Bestäm avbildningens derivata i de punkterna i komplexe talplanet, där derivatan existerar.
   (e) Vad är bildmängden för enhetscirkeln $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ under denna avbildning?

2. (a) Bestäm bildmängden, som exponentialfunktionen $z \mapsto e^z$ ger för området $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z < 0 \text{ och } \operatorname{Im} z \in (0, 2\pi)\}$.
   (b) Bestäm Möbius-avbildningen M, som avbildar enhetsskivan $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ på nedre planet $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z < 0\}$ så att $M(1) = 0$.
   (c) Bestäm en konform avbildning, som avbildar första kvadranten $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0 \text{ och } \operatorname{Re} z > 0\}$ på området $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0 \text{ och } \operatorname{Im} z \in (2\pi, 3\pi)\}$.

3. Bestäm värdet hos följande integraler
   (a) $\oint_\gamma \frac{\sin(e^z)}{z} dz$,
   (b) $\oint_\gamma \frac{\sin(e^z)}{z^2} dz$,
   (c) $\oint_\gamma \frac{\sin(e^z)}{e^{\sin z}} dz$,

   då γ är cirkeln $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ genomlupen en gång i positiv riktning.

4. Bilda Laurent-utvecklingen av funktionen
$$z \mapsto \frac{z^2 - 2z + 3}{z - 2}$$
   i området
   (a) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - 1| < 1\}$,
   (b) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - 1| > 1\}$.