Aalto-yliopisto, Matematiikan laitos Peltonen, Eirola / Raita
Mat-1.1030, Matematiikan peruskurssi L 3
2. välikoe, 16. 11. 2010

Kirjoita selvästi jokaiseen koepaperiin kysytyt tiedot!

1. Mitkä seuraavista joukoista ovat vektoriavaruuksia?

   (a) $V_1 = \{u : \Omega \to \mathbb{R} \mid u$ on kahdesti jatkuvasti derivoituva ja $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0\}$, missä $\Omega \subset \mathbb{C}$ on alue.

   (b) V_2 on kääntyvien kompleksilukukertoimisten neliömatriisien kokoelma varustettuna matriisien yhteenlaskulla ja skalaarilla kertomisella.

   (c) $V_3 = \mathbb{C}$ varustettuna tavallisella kompleksilukujen yhteenlaskulla ja ehdon $(\alpha, x) \mapsto (\operatorname{Re}\alpha)x$, määräämällä skalaarilla $\alpha \in \mathbb{C}$ kertomisella.

2. Olkoon P^2 enintään astetta kaksi olevien reaalimuuttujan reaalipolynomien muodostama vektoriavaruus. Tarkastellaan ehdon $A(f)(x) = xf'(x) - f(x)$ määräämää kuvausta.

   (a) Osoita, että $A : P^2 \to P^2$ on lineaarinen kuvaus.

   (b) Onko A injektio tai surjektio?

   (c) Määrää A:n esitysmatriisi kannan $\{1, x, x^2\}$ suhteen.

3. Tarkastellaan kolmen kompleksimuuttujan avaruutta $\mathbb{C}^3$ varustettuna tavallisella sisätulolla $< z, w >= z_1\bar{w}_1 + z_2\bar{w}_2 + z_3\bar{w}_3$, kun $z = (z_1, z_2, z_3)$ ja $w = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{C}^3$.

   (a) Jos $U = \{(1, 0, \mathrm{i}), (1, 2, 1)\}$, niin muodosta sen ortokomplementti $U^\perp \subset \mathbb{C}^3$.

   (b) Muodosta ortonormaalit kannat vektoriavaruuksille U ja $U^\perp$.

4. Olkoon V sisätuloavaruus.

   (a) Osoita, että sisätulon indusoimalle normille pätee

   $$||v - w||^2 + ||v + w||^2 = 2||v||^2 + 2||w||^2$$

   kaikilla $v, w \in V$.

   (b) Määrääkö ehto $||(x, y)|| = |x| + |y|$ normin tasoon, kun se varustetaan tavallisella vektoreiden yhteenlaskulla ja skalaarilla kertomisella, $x, y \in \mathbb{R}$ ja $|\cdot|$ on reaaliluvun itseisarvo?

   (c) Löytyykö tasosta sisätuloa siten, että pätee $(|x|+|y|)^2 =< (x, y), (x, y) >$ kaikilla $(x, y) \in \mathbb{R}^2$?

Aalto-yliopisto, Matematiikan laitos — Peltonen, Eirola / Raita

Mat-1.1030, Matematiikan peruskurssi L 3

2. välikoe, 16. 11. 2010

Fyll i den efterfrågade informationen på varje provpapper!

1. Vilka av följande mängder är vektorrum?

   (a) $V_1 = \{u : \Omega \to \mathbb{R} \mid u$ är två gånger kontinuerligt deriverbar och $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0\}$, där $\Omega \subset \mathbb{C}$ är ett område.

   (b) V_2 är mängden av inverterbara kvadratiska matriser med komplexa tal som koefficienter, utrustad med matrisaddition och skalar multiplikation.

   (c) $V_3 = \mathbb{C}$ utrustad med vanlig addition av komplexa tal och multiplikation med skalar given av $(\alpha, x) \mapsto (\operatorname{Re}\alpha)x$, $\alpha \in \mathbb{C}$.

2. Låt P^2 vara vektorrummet bestående av reella polynom av grad högst två av en reel variabel. Betrakta avbildningen, som ges av $A(f)(x) = xf'(x) - f(x)$.

   (a) Bevisa att $A : P^2 \to P^2$ är en linear avbildning.

   (b) Är A injektiv eller surjektiv?

   (c) Bestäm representationmatrisen för A med avseende på basen $\{1, x, x^2\}$.

3. Betrakta rummet $\mathbb{C}^3$ av tre komplexa variabler utrustad med den vanliga inre produkten $< z, w >= z_1\bar{w}_1 + z_2\bar{w}_2 + z_3\bar{w}_3$, då $z = (z_1, z_2, z_3)$ och $w = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{C}^3$.

   (a) Om $U = \{(1, 0, \mathrm{i}), (1, 2, 1)\}$, bilda ortogonala komplementet $U^\perp \subset \mathbb{C}^3$.

   (b) Bilda ortonormala bas för vektorrummen U ja $U^\perp$.

4. Låt V vara ett inre produktrum.

   (a) Bevisa, att för normen inducerad av inre produkten håller

   $$||v - w||^2 + ||v + w||^2 = 2||v||^2 + 2||w||^2$$

   för alla $v, w \in V$.

   (b) Kommer vilkoret $||(x, y)|| = |x| + |y|$ att bestämma en norm i planet, om planet är utrustad av den vanliga addition och multiplikation med skalar, då $x, y \in \mathbb{R}$ och $|\cdot|$ är absolutbelopp av det reella talet?

   (c) Kan man hitta en inre produkt i planet så att

   $$(|x| + |y|)^2 =< (x, y), (x, y) >$$

   håller för alla $(x, y) \in \mathbb{R}^2$?