

Välikoe kestää 3 tuntia.

Laskimen käyttö ei ole sallittu

1. Ratkaise tehtävä

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{b}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0,$$

kun  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{b}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ t \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ .

2. Olkoot  $x_1$  ja  $x_2$  yhtälön  $x'(t) = f(t, x(t))$  ratkaisuja, missä  $f : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  on jatkuva ja toteuttaa  $x$ :n suhteen Lipschitz-ehdon.

Oletetaan, että  $x_1(0) > x_2(0)$ . Näytä, että  $x_1(t) > x_2(t)$  kaikilla  $t \in [0, T]$ .

Vihje: Oleta, että näin ei olisi. Minkä kanssa joutuisit ristiriitaan?

3. Etsi systeemin

$$\begin{cases} x_1' = 1 - x_1 - 2x_2 \\ x_2' = x_1^2 - x_2 \end{cases}$$

tasapainopisteet ja linearisoi systeemi näissä. Minkä laatuista lineaariset systeemit ovat? Piirrä kuva systeemin käyttäytymisestä tasapainopisteiden ympäristössä, erityisesti, kuinka ratkaisut lähestyvät niitä tai poistuvat niistä.

4. Määrää Adams-Bashforth -menetelmän

$$x_{j+2} - x_{j+1} = \frac{h}{2} (3f_{j+1} - f_j)$$

stabiilisuusalue ja piirrä siitä kuva laskemalla muutama reunan piste.

Mellanhöret tar 3 timmar

Räknare är inte tillåten

1. Lös uppgiften

$$x'(t) = Ax(t) + b(t), \quad x(0) = x_0,$$

då  $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ ,  $b(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ t \end{bmatrix}$ ,  $x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ .

2. Låt  $x_1$  och  $x_2$  vara lösningar till ekvationen  $x'(t) = f(t, x(t))$ , där  $f : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  är kontinuerlig och uppfyller Lipschitz villkoret för  $x$ .

Antag att  $x_1(0) > x_2(0)$ . Visa att  $x_1(t) > x_2(t)$  för alla  $t \in [0, T]$ .

Tips: Antag att detta inte stämmer. Med vad skulle du få en motstridhet?

3. Sök jämviktpunkterna för systemet

$$\begin{cases} x'_1 = 1 - x_1 - 2x_2 \\ x'_2 = x_1^2 - x_2 \end{cases}$$

och linearisera systemet i dessa. Av vilken typ är jämviktpunkterna? Rita en bild av systemets betende i dessas omgivning. Speciellt då man närmar eller avlägsnar sig.

4. Bestäm stabilitetsområdet för Adams-Bahforths metod

$$x_{j+2} - x_{j+1} = \frac{h}{2} (3f_{j+1} - f_j),$$

samt rita en bild av det genom att beräkna några randpunkter.