Aalto-yliopisto
Matematiikan laitos

Talponen, Malinen, Aalto

Mat-1.1210 Matematiikan peruskurssi S1

Välikoe, 11.10.2010 klo 16-19

Ylioppilastutkinnossa hyväksytyt laskimet on tässäkin sallittu.

Vastaa seuraaviin tehtäviin. Kaikista tehtävistä saa 6 pistettä.

Muista perustella selkeästi ratkaisusi.

T1. Esitä $\frac{1+2i}{3+4i}$ polaarimuodossa.

Ratkaisu:

$z = \frac{1+2i}{3+4i} = \frac{(1+2i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)} = \frac{3+6i-4i+8}{9+16} = \frac{11+2i}{25} = \frac{11}{25} + \frac{2i}{25}$

$z = r\mathrm{e}^{i\varphi}$

$r = \sqrt{(\frac{11}{25})^2 + (\frac{2}{25})^2} = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$\varphi = \tan^{-1}(\frac{2}{11})$

Vastaus: $z = \frac{1}{\sqrt{5}}\mathrm{e}^{i\tan^{-1}(\frac{2}{11})}$

Pisteytys:

- Oppilas on saanut sievennettyä jaksolaskun 2p
- Oppilas on älynnyt polaarimuodon idean 2p
- Laskut on suoritettu ilman virheitä 2p

T2. Ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

kääntämällä matriisi.

Ratkaisu:

Teoriaosuus:

Alkuperäinen yhtälö on $A\vec{x} = \vec{b}$ ja kertomalla matriisi A tämän käänteismatriisilla A^{-1} saadaan identtiteettimatriisi I. Kerrotaan siis alkuperäisen yhtälön molemmat puolet A^{-1}:llä jolloin saadaan $A^{-1}A\vec{x} = I\vec{x} = \vec{x} = A^{-1}\vec{b}$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tilde{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tilde{}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & | & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \tilde{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Tarkistus:

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1-1 & 2-1 & -1+1 \\ 2-2 & 2-2 & -1+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

Nyt voidaan laskea $\vec{x}$ aiemmin esitellyn kaavan perusteella:

$$\vec{x} = A^{-1}\vec{b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4-3 \\ -1-2+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Vastaus:

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Pisteytys:

- Oppilas on näyttänyt ymmärtävänsä miksi matriisi pitää kääntää 2p
- Matriisin kääntäminen on onnistunut 2p
- Laskut on suoritettu ilman virheitä ja matriisinotaatio on oikein 2p

T3. Päättele kerroinmatriisin determinanttia tutkimalla, että seuraavalla yhtälöryhmälä on korkeintaan yksi ratkaisu (3p).

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 &= 0 \end{cases}$$

Ratkaise yhtälöryhmä Gaussin eliminoinnilla (3p).

Ratkaisu:

Teoriaa:

Mikäli matriisin determinantti on nolla, matriisi on singulaarinen eikä sille tällöin voida myöskään laskea käänteismatriisia. Ei-singulaarisella matriisilla on tasan yksi käänteismatriisi. Tehtävässä on tarkoitus ensin tarkistaa onko determinantti nollasta poikkeava, jolloin voidaan todeta, että matriisi on kääntyvä ja yhtälöryhmälle löytyy tasan yksi ratkaisu.

$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 3 - (-1) - (-3-2) - (1-2) = 4 + 5 + 1 = 10$

Determinantti on nollasta poikkeava, seuraavaksi ratkaistaan yhtälöryhmä Gaussin eliminoinnilla:

$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & | & 1 \\ 1 & 1 & -1 & | & 1 \\ -1 & 1 & 3 & | & 0 \end{bmatrix} \tilde{} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & | & 1 \\ 0 & 2 & -3 & | & 0 \\ 0 & 0 & 5 & | & 1 \end{bmatrix}$

Nyt tästä voidaan ratkaista ensin $5x_3 = 1 \Leftrightarrow x_3 = \frac{1}{5}$ ja seuraavasta yhtälöstä vastaavasti $2x_2 - 3x_3 = 0 \Leftrightarrow x_2 = \frac{3}{10}$ ja lopulta vielä $x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \Leftrightarrow x_1 = 1 + \frac{3}{10} - \frac{2}{5} = \frac{9}{10}$

Vastaus:

$\vec{x} = \begin{bmatrix} \frac{9}{10} \\ \frac{3}{10} \\ \frac{1}{5} \end{bmatrix}$

Pisteytys:

- Determinantin laskeminen 2p
- Oppilas on osannut tulkita determinantin tuloksen 1p
- Gaussin eliminointi on mennyt oikein 2p
- Oikea ratkaisu 1p
- Jos Gaussin eliminoinnissa ja determinantin laskemisessa vain vähäisiä virheitä ei molemmista pisteitä pois, vaan pelkästään toisesta

T4. Laske A^{2010}, missä

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ratkaisu:

Teoriaa:

Kokoa $n \times n$ oleva matriisi A voidaan diagonalisoida jos ja vain jos sillä on n kpl lineaarisesti riippumattomia ominaisvektoreita. Diagonalisointi tarkoittaa, että se voidaan kirjoittaa muodossa $A = PDP^{-1}$, jossa on D on A:n ominaisarvoista koostuva diagonaalimatriisi ja P on A:n ominaisvektoreista koostuva matriisi (todistus Layn kirjassa sivulla 337, kolmas painos). Matriisin potensseille saadaan kaava $A^n = PDP^{-1}PDP^{-1}...PDP^{-1} = PD^nP^{-1}$.

A on valmiiksi yläkolmiomuodossa, joten A:n ominaisarvot saadaan diagonaalilta ja ne ovat $\lambda_1 = 1$ ja $\lambda_2 = 2$. Näitä vastaavat ominaisvektorit saadaan yhtälöstä $A\vec{x_k} = \lambda_k \vec{x_k}$.

$\lambda_1 = 1 \Rightarrow \vec{x_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\lambda_2 = 2 \Rightarrow \vec{x_2} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

Nyt saadaan muodostettua $P = \begin{bmatrix} \vec{x_1} & \vec{x_2} \end{bmatrix}$:

$P = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

ja kääntämällä P saadaan

$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Nyt voidaan tarkistaa, että $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

ja nyt saadaan

$A^{2010} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^{2010} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \times 2^{2010} \\ 0 & 2^{2010} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \times (2^{2010} - 1) \\ 0 & 2^{2010} \end{bmatrix}$

Vastaus:

$A^{2010} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \times (2^{2010} - 1) \\ 0 & 2^{2010} \end{bmatrix}$

Pisteytys:

- Ominaisarvojen laskeminen 1p
- Ominaisvektoreitten laskeminen 1p
- Molemmat oikein 1p
- Diagonalisointi 1p
- Potenssi 1p
- Molemmat oikein 1p
- Pienistä laskuvirheistä esim. matriisien kertolaskussa, ei pistemenetyksiä