Aalto-yliopisto, Matematiikan ja systeemianalyysin laitos Rasila/Quach

Mat-1.1230 peruskurssi S3 — Syksy 2010

2. välikoe — Ti 16.11.2010 klo 16.00-19.00

Kokeessa ei saa käyttää laskinta eikä taulukkokirjaa.

1. Ratkaise Z-muunnosta käyttäen differenssiyhtälö

$$y_{n+2} - \frac{1}{4}y_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n, \qquad y_0 = y_1 = 0.$$

2. (a) Olkoon $f(t)$ parillinen funktio ja $c > 0$. Osoita, että

$$\int_{-c}^{c} f(t)\,dt = 2\int_0^c f(t)\,dt.$$

(b) Määritä funktion $f(t) = |t|$, kun $t \in [-T/2, T/2]$ ja $f(t+T) = f(t)$ Fourier-sarja.

3. (a) Anna määritelmä funktion $f(t)$ Fourier-muunnokselle ja Fourier-muunnoksen $\hat{f}(\omega)$ käänteismuunnokselle.

(b) Laske suoraan määritelmää käyttäen funktion

$$f(t) = \begin{cases} e^{kt}, & t < 0 \quad (k > 0), \\ 0, & t \geq 0, \end{cases}$$

Fourier-muunnos.

4. Laske matriisin

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 16 & 8 & 4 \\ 8 & 6 & 0 \\ 4 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

Cholesky-hajotelma $\mathbf{U}^T\mathbf{U}$.

Vihje: Viereisellä sivulla olevat kaavat voivat virkistää muistia.

Kaavoja:

Hyperboliset ja trigonometriset funktiot:

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \qquad \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2},$$

$$\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z}, \qquad \coth z = \frac{\cosh z}{\sinh z},$$

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \qquad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i},$$

$$\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y),$$

$$\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)$$

Z-muunnokseen liittyviä kaavoja

Jos $A(z) = Z(a_n)$, niin

$$Z(na_n) = -zA'(z),\ Z(c^n a_n) = A(z/c),$$

$$Z(a_{n+1}) = z(A(z) - a_0),\ Z(a_{n+2}) = z^2(A(z) - a_0 - a_1/z).$$

Z-muunnoksia:

(a_n)	$A(z) = Z(a_n)$
(1)	$z/(z-1)$
(n)	$z/(z-1)^2$
(n^2)	$z(z+1)/(z-1)^3$
(α^n)	$z/(z-\alpha)$
$(n\alpha^n)$	$\alpha z/(z-\alpha)^2$
$(\cos(n\pi/2))$	$z^2/(z^2+1)$
$(\sin(n\pi/2))$	$z/(z^2+1)$
$(\sin(n\alpha))$	$z\sin\alpha/(z^2 - 2z\cos\alpha + 1)$
$(\cos(n\alpha))$	$z(z-\cos\alpha)/(z^2 - 2z\cos\alpha + 1)$

Gram-Schmidt:

$$\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$$

$$v_1 = a_1 \tag{1}$$

$$q_1 = \frac{v_1}{||v_1||} \tag{2}$$

$$v_{k+1} = a_{k+1} - \langle a_{k+1}, q_1\rangle q_1 - \ldots - \langle a_{k+1}, q_k\rangle q_k \tag{3}$$

$$q_{k+1} = \frac{v_{k+1}}{||v_{k+1}||} \tag{4}$$

$$\to \{q_1, q_2, \ldots, q_n\}$$

1. $y_{n+2} - \frac{1}{4} y_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad , \quad y_0 = y_1 = 0$

Z-muunnetaan puolittain.

Käytetään kaavoja

$$Z(y_{n+2}) = z^2\left(Y(z) - y_0 - \frac{y_1}{z}\right)$$

$$Z\left(\left(\tfrac{1}{2}\right)^n\right) = \frac{z}{z-\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow z^2 Y(z) - \underbrace{z^2 y_0}_{=0} - \underbrace{z y_1}_{=0} - \frac{1}{4} Y(z) = \frac{z}{z-\frac{1}{2}}$$

(alkuehdot)

$$\Rightarrow \left(z^2 - \frac{1}{4}\right) Y(z) = \frac{z}{z-\frac{1}{2}}$$

$$Y(z) = \frac{z}{(z-\frac{1}{2})(z^2-\frac{1}{4})} = \frac{z}{(z-\frac{1}{2})(z+\frac{1}{2})(z-\frac{1}{2})}$$

$$= \frac{z}{(z-\frac{1}{2})^2(z+\frac{1}{2})}$$

$\boxed{\text{TAPA 1.}}$

Muodostetaan osamurtohajotelma $\frac{Y(z)}{z}$:lle

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{1}{(z-\frac{1}{2})^2(z+\frac{1}{2})} = \frac{A}{z-\frac{1}{2}} + \frac{B}{(z-\frac{1}{2})^2} + \frac{C}{z+\frac{1}{2}}$$

Kertoimet A, B ja C residyjen avulla:

$$A = \lim_{z\to\frac{1}{2}} \frac{d}{dz}\left[\cancel{(z-\tfrac{1}{2})^2}\frac{1}{\cancel{(z-\frac{1}{2})^2}(z+\frac{1}{2})}\right]$$

$$= \lim_{z\to\frac{1}{2}}\left(-\frac{1}{(z+\frac{1}{2})^2}\right) = -1$$

$$B = \lim_{z \to \frac{1}{2}} \left(\left(z - \frac{1}{2}\right)^2 \frac{1}{\left(z - \frac{1}{2}\right)^2 \left(z + \frac{1}{2}\right)} \right)$$

$$= \lim_{z \to \frac{1}{2}} \frac{1}{z + \frac{1}{2}} = 1$$

$$C = \lim_{z \to -\frac{1}{2}} \left(\left(z + \frac{1}{2}\right) \frac{1}{\left(z - \frac{1}{2}\right)^2 \left(z + \frac{1}{2}\right)} \right) = \lim_{z \to -\frac{1}{2}} \frac{1}{\left(z - \frac{1}{2}\right)^2} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{Y(z)}{z} = -\frac{1}{z - \frac{1}{2}} + \frac{1}{\left(z - \frac{1}{2}\right)^2} + \frac{1}{z + \frac{1}{2}}$$

$$Y(z) = -\frac{z}{z - \frac{1}{2}} + \frac{z}{\left(z - \frac{1}{2}\right)^2} + \frac{z}{z + \frac{1}{2}}$$

Käänteismuunnetaan yo. lauseke termeittäin

$$Z^{-1}\left(\frac{z}{z - \frac{1}{2}}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$Z^{-1}\left(\frac{z}{\left(z - \frac{1}{2}\right)^2}\right) = Z^{-1}\left(2 \frac{\frac{1}{2} z}{\left(z - \frac{1}{2}\right)^2}\right) = 2n\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$Z^{-1}\left(\frac{z}{z + \frac{1}{2}}\right) = Z^{-1}\left(\frac{z}{z - \left(-\frac{1}{2}\right)}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{y_n = -\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2n\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(-\frac{1}{2}\right)^n}}$$

$\boxed{\text{TAPA 2.}}$ Lasketaan käänteismuunnos suoraan integraalista

$$y_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C Y(z)\, z^{n-1}\, dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{z^n}{\left(z - \frac{1}{2}\right)^2 \left(z + \frac{1}{2}\right)}\, dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z)\, dz$$

Ratkaistaan integraali residylauseella

$$\Rightarrow \quad y_n = \frac{1}{2\pi i}\, 2\pi i \left(\operatorname*{Res}_{z=\frac{1}{2}} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=-\frac{1}{2}} f(z) \right)$$

$$= \operatorname*{Res}_{z=\frac{1}{2}} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=-\frac{1}{2}} f(z)$$

Lasketaan residyt:

$$\operatorname*{Res}_{z=\frac{1}{2}} f(z) = \lim_{z\to\frac{1}{2}} \left[\frac{d}{dz} \left(\frac{z^n}{\cancel{(z-\frac{1}{2})^2}(z+\frac{1}{2})} \cdot \cancel{(z-\tfrac{1}{2})^2} \right) \right]$$

$$= \lim_{z\to\frac{1}{2}} \left[\frac{n z^{n-1}\cdot(z+\frac{1}{2}) - z^n}{(z+\frac{1}{2})^2} \right]$$

$$= n\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-1} - \left(\tfrac{1}{2}\right)^n = 2n\left(\tfrac{1}{2}\right)^n - \left(\tfrac{1}{2}\right)^n$$

$$\operatorname*{Res}_{z=-\frac{1}{2}} f(z) = \lim_{z\to-\frac{1}{2}} \left[\frac{z^n}{(z-\frac{1}{2})^2\cancel{(z+\frac{1}{2})}} \cdot \cancel{(z+\tfrac{1}{2})} \right]$$

$$= \lim_{z\to-\frac{1}{2}} \left[\frac{z^n}{(z-\frac{1}{2})^2} \right] = \left(-\tfrac{1}{2}\right)^n$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{y_n = 2n\left(\tfrac{1}{2}\right)^n - \left(\tfrac{1}{2}\right)^n + \left(-\tfrac{1}{2}\right)^n}}$$

S3

2. välikoe

2. a) $f(t)$ on parillinen eli $f(t) = f(-t)$

$$\int_{-c}^{c} f(t)\,dt = \int_{-c}^{0} f(t)\,dt + \int_{0}^{c} f(t)\,dt$$

Tehdään muuttujan vaihdos $t = -s \Rightarrow dt = -ds$ 1. integraalitermiin.

$$= \int_{c}^{0} f(-s)(-ds) + \int_{0}^{c} f(t)\,dt = \int_{0}^{c} f(-s)\,ds + \int_{0}^{c} f(t)\,dt$$

$$\overset{\text{parillisuus}}{=} \int_{0}^{c} f(s)\,ds + \int_{0}^{c} f(t)\,dt \overset{s=t}{=} 2\int_{0}^{c} f(t)\,dt. \quad \square$$

$\boxed{3\text{ p.}}$

- Huonot perustelut, esim miinusmerkkejä väärässä paikassa -1 p.
- Kuvan tai esimerkin avulla tehty 1 p.

b) $f(t) = |t|$, $t \in [-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$, $f(t+T) = f(t)$

Fourier-sarja

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)\right]$$

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\,dt, \quad a_k = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos(k\omega t)\,dt$$

$f(t)=|t|$ on parillinen funktio, joten kertoimet b_k ovat nollia.

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |t|\,dt \underset{\text{parill.}}{=} \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} t\,dt = \frac{2}{T}\Big/_0^{\frac{T}{2}} t^2 = \frac{T}{2}$$

$$a_k = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |t|\cos(k\omega t)\,dt = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} t\cos(k\omega t)\,dt$$

$$= \frac{4}{T}\Big[\underbrace{\Big/_0^{\frac{T}{2}} \frac{t}{k\omega}\sin(k\omega t)}_{0} - \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{1}{k\omega}\sin(k\omega t)\,dt\Big]$$

$\left[\omega = \frac{2\pi}{T}\right]$

$$= \frac{4}{T}\Big[\Big/_0^{\frac{T}{2}} \frac{1}{k^2\omega^2}\cos(k\omega t)\Big] = \frac{T}{\pi^2 k^2}\big(\cos(k\pi) - \cos 0\big)$$

$$= \frac{T}{\pi^2 k^2}\big((-1)^k - 1\big)$$

$$\Rightarrow f(t) = \frac{T}{4} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{T\big((-1)^k - 1\big)}{\pi^2 k^2}\cos(k\omega t)\right].$$

- Sarja ja kertoimet suunnilleen oikein +1p.
- Itseisarvosta eroon +1p.
- Osittaisintegrointi (merkkivirheillä ei väliä) +1p.

$= \boxed{3p.}$

3. a) $\hat{\mathcal{F}}\{f(t)\} = \hat{f}(\omega)$ Fourier-muunnos

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt$$

Käänteismuunnos

$$\hat{\mathcal{F}}^{-1}\{\hat{f}(\omega)\} = f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega$$

- Määritelmät oikein ja yhteensopivia $\boxed{3\text{ p.}}$
  - vakioiden tulo $\frac{1}{2\pi}$
  - toisessa eksponenttitermissä $-i\omega t$ ja toisessa $i\omega t$

  } riippuen lähteestä

- Virheitä em. kohdissa -1 p.

b) $f(t) = \begin{cases} e^{kt}, & t < 0 \\ 0, & t \geq 0 \end{cases}$ $\quad k > 0$

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t}\, dt = \int_{-\infty}^{0} e^{kt} e^{-i\omega t}\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{0} e^{(k-i\omega)t}\, dt = \frac{1}{k-i\omega} \Big/_{-\infty}^{0} e^{(k-i\omega)t}$$

$$= \frac{1}{k-i\omega}(1-0) = \frac{1}{k-i\omega}.$$

- Sijoitus a)-kohdan määritelmään +1 p.
- Integraalin rajat ja laskut oikein +2 p.

$\boxed{3 \text{ p.}}$

Huom. Epäoleellinen integraali pitäisi laskea raja-arvona, mutta sitä ei vaadittu.

4.

$$A = \begin{bmatrix} 16 & 8 & 4 \\ 8 & 6 & 0 \\ 4 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

Cholesky-hajotelma : $A = U^T U$

$$A = \begin{pmatrix} u_{11} & 0 & 0 \\ u_{12} & u_{22} & 0 \\ u_{13} & u_{23} & u_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}$$

Lasketaan matriisituloa auki ja verrataan A:han.
Ensimmäiseltä riviltä saadaan

$$u_{11} \cdot u_{11} + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = u_{11}^2 = 16$$

valitaan posit. ratkaisu $\Rightarrow \underline{u_{11} = 4}$

$$u_{11} \cdot u_{12} + 0 \cdot u_{22} + 0 \cdot 0 = u_{11} u_{12} = 8$$

$$\Leftrightarrow 4u_{12} = 8 \Leftrightarrow \underline{u_{12} = 2}$$

$$u_{11} \cdot u_{13} + 0 \cdot u_{23} + 0 \cdot u_{33} = u_{11} u_{13} = 4$$

$$\Leftrightarrow 4u_{13} = 4 \Leftrightarrow \underline{u_{13} = 1}$$

Toiselta riviltä:

$$u_{12}^2 + u_{22}^2 = 6 \Leftrightarrow 2^2 + u_{22}^2 = 6$$

$$\Leftrightarrow u_{22}^2 = 2 \Leftrightarrow \underline{u_{22} = \sqrt{2}}$$

valitaan posit. ratk.

$$u_{12} u_{13} + u_{22} u_{23} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot 1 + \sqrt{2}\, u_{23} = 0 \Leftrightarrow \underline{u_{23} = -\sqrt{2}}$$

Kolmannelta riviltä:

$$u_{13}^2 + u_{23}^2 + u_{33}^2 = 7$$

$$\Leftrightarrow 1^2 + (-\sqrt{2})^2 + u_{33}^2 = 7 \Leftrightarrow \underline{u_{33} = 2}$$

valitaan posit. ratk.

Näin hajotelmaksi saadaan

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & -\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

```
T1) - Z-muunnos differenssiyhtälöstä 1p
   - ratkaistu Y(z) 1p
   - loput 4p.

 Jos ratkaisu osamurroilla (tapa 1 malliratkaisussa):
   - idea osamurtohajotelmasta Y(z)/z :lle 1p
   - oikean muotoinen hajotelma (eli mm. 2-kertainen napa huomattu oikein) 1p.
   - Kertoimet ratkaistu oikein 1p.
   - Käänteismuunnos oikein 1p.

 Jos ratkaistu suoraan käänteismuunnoksen integraalista (tapa 2):
   - oikea integraalikauseke 1p
   - osasi soveltaa residylausetta n. 1p
   - residyt oikein (ja tätä myötä myös käänteismuunnos) 2p.

T4) - lähtökohta oikein (eli tietää mikä Cholesky-hajotelma on) 2p
    - oikeista laskuista loput 4p.
```