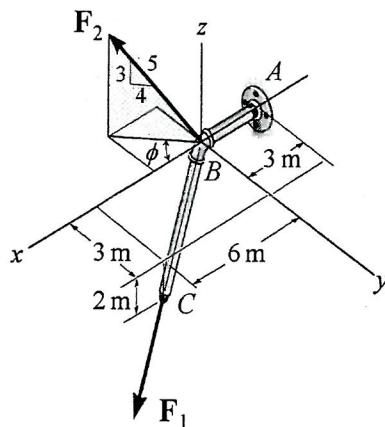
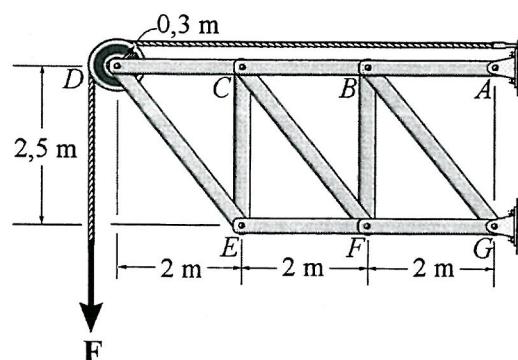


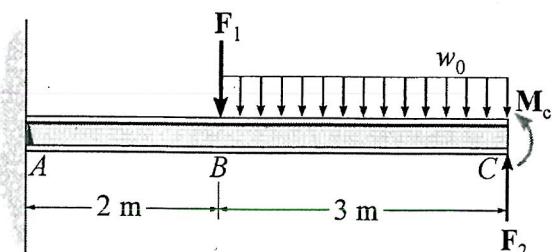
1. Määritä putkirakenteeseen kohdistuvan voimasysteemin momenttiresultantti pisteen  $A$  suhteen, kun  $F_1 = 14 \text{ kN}$ ,  $F_2 = 20 \text{ kN}$  ja  $\phi = 30^\circ$ . Ilmoita momenttiresultantin suuruus ja suuntakulmat. Voima  $F_1$  on osan  $BC$  suuntainen.



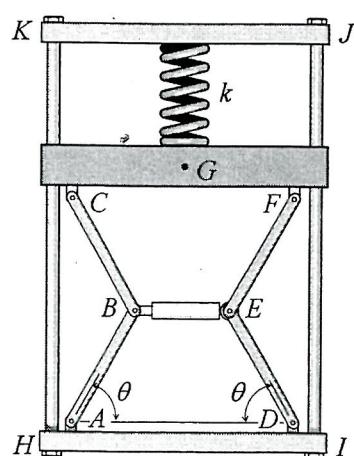
2. Määritä ristikkoon sauvien  $BC$ ,  $BF$  ja  $FG$  sauvavaimat, kun köyteen kohdistuvan voiman suuruus on  $F = 500 \text{ N}$ . Ilmoita, onko sauvissa vetaa (V) vai puristusta (P). Ristikko on tuettu kahdella kiinteällä niveltuella  $A$  ja  $G$ , ja köysipyörä  $D$  on kitkaton.



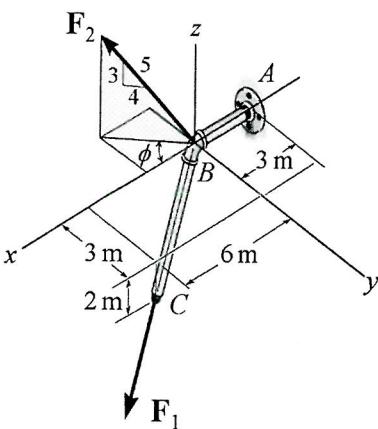
3. Määritä seinään jälkästi kiinnitetyt palkin leikkausvoima- ja taivutusmomentijakaumat ja piirrä kuviot, kun  $F_1 = 5 \text{ kN}$ ,  $F_2 = 4 \text{ kN}$ ,  $M_c = 6 \text{ kNm}$  ja  $w_0 = 2 \text{ kN/m}$ . Ilmoita lisäksi palkin rasitetuimmat poikkileikkaukset.



4. Puristin koostuu neljästä nivelsauvasta  $AB$ ,  $BC$ ,  $DE$  ja  $EF$ , hydraulisesta sylinteristä  $BE$  ja palkista  $CF$ , joka liukuu kitkattomasti pystysuorassa suunnassa, sekä jäykästä tukirakenteesta  $HJK$ . Määritä jousen kokoonpuristamisessa vaikuttavien voimien tekemä virtuaalinen työ kulman  $\theta$  funktiona. Jousen jousivakio on  $k = 1 \text{ kN/m}$  ja se on venymätön, kun  $\theta = 45^\circ$ . Kunkin nivelsauvan pituus on  $0,4 \text{ m}$ , palkin paino  $400 \text{ N}$  ja painopiste pisteessä  $G$ . Sauvojen, hydraulisen sylinterin eikä jousen omaa painoa oteta huomioon. Mikä on hydraulisessa sylinterissä vaikuttavan voiman suuruus tasapainoasemassa, kun  $\theta = 60^\circ$ ?



1. Määritä putkirakenteeseen kohdistuvan voimasysteemin momenttiresultantti pisteen A suhtein, kun  $F_1 = 14 \text{ kN}$ ,  $F_2 = 20 \text{ kN}$  ja  $\phi = 30^\circ$ . Ilmoita momenttiresultantin suuruus ja suuntakulmat. Voima  $F_1$  on osan BC suuntainen.



### 1. Voimavektorit

$$\bar{F}_1 = F_1 \frac{\bar{r}_{BC}}{r_{BC}} = 14 \text{ kN} \frac{6\bar{i} + 3\bar{j} - 2\bar{k}}{\sqrt{36+9+4}} = \{12\bar{i} + 6\bar{j} - 4\bar{k}\} \text{ kN}$$

$$\begin{aligned} \bar{F}_2 &= F_{2x}\bar{i} + F_{2y}\bar{j} + F_{2z}\bar{k} = F_2 \frac{4}{5} \cos\phi \bar{i} - F_2 \frac{4}{5} \sin\phi \bar{j} + F_2 \frac{3}{5} \bar{k} \\ &= \{8\sqrt{3}\bar{i} - 8\bar{j} + 12\bar{k}\} \text{ kN} \end{aligned}$$

### 2. Momenttiresultantivektori

$$\begin{aligned} \bar{M}_{RA} &= \bar{r}_{AB} \times (\bar{F}_1 + \bar{F}_2) = \{3\bar{i}\} \text{ m} \times \{(12 + 8\sqrt{3})\bar{i} - 2\bar{j} + 8\bar{k}\} \text{ kN} \\ &= \{-24\bar{j} - 6\bar{k}\} \text{ kNm} = M_{RAy}\bar{j} + M_{RAz}\bar{k} \\ M_{RAx} &= 0 \end{aligned}$$

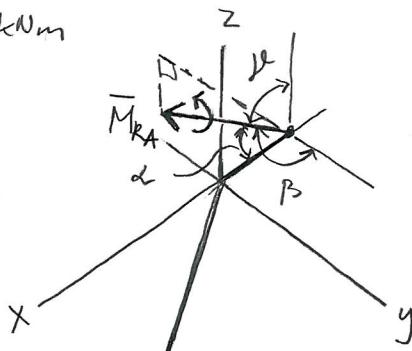
### 3. Momenttiresultantin suuruus ja suuntakulmat

$$M_{RA} = \sqrt{M_{RAx}^2 + M_{RAy}^2 + M_{RAz}^2} = 6\sqrt{17} \text{ kNm}, \approx 24,7 \text{ kNm}$$

$$\alpha = \arccos \frac{M_{RAx}}{M_{RA}} = 90^\circ$$

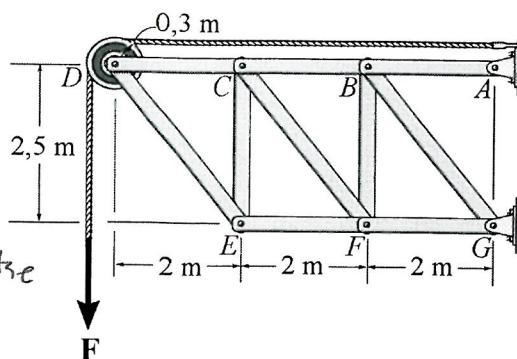
$$\beta = \arccos \frac{M_{RAy}}{M_{RA}} = 166^\circ$$

$$\gamma = \arccos \frac{M_{RAz}}{M_{RA}} = 104^\circ$$



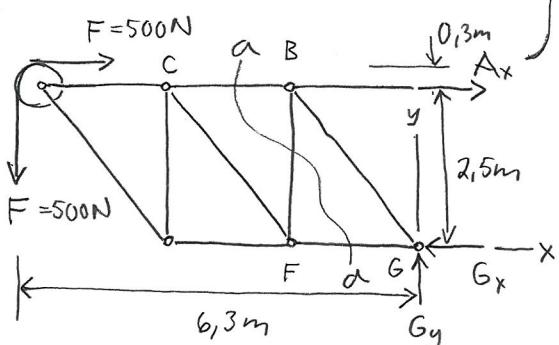
2. Määritä ristikön sauvojen  $BC$ ,  $BF$  ja  $FG$  sauvavoimat, kun köyteen kohdistuvan voiman suuruus on  $F = 500 \text{ N}$ . Ilmoita, onko sauvissa vетоа (V) vai puristusta (P). Ristikko on tuettu kahdella kiinteällä niveltuella  $A$  ja  $G$ , ja köysipyörä  $D$  on kitkaton.

Huom! Lekkausmenetelmästä käytäen c:tavatiksi määritä tukivoimat.



### 1. Ristikön tukivoimat

VKK



Käden voiman säännön nojalla  
 $A_y = 0$

Tasapaino

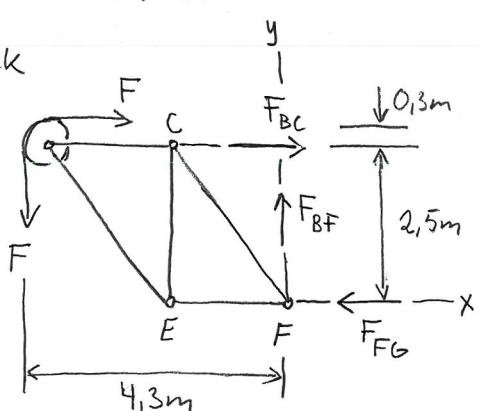
$$\begin{aligned} +\uparrow \sum M_G = 0; \quad & A_x \cdot 2.5 \text{ m} + F \cdot 2.8 \text{ m} - F \cdot 6.3 \text{ m} = 0 \\ \Rightarrow A_x = \frac{7}{5} F = 700 \text{ N} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} +\rightarrow \sum F_x = 0; \quad & A_x - G_x + F = 0 \\ \Rightarrow G_x = 1.2 \text{ kN} \end{aligned}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0; \quad G_y - F = 0; \Rightarrow G_y = 500 \text{ N}$$

### 2. Sauvavoimat leikkauksen menetelmällä läikkäusta a-a käytäen

VKK



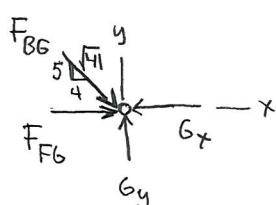
$$\begin{aligned} +\uparrow \sum M_F = 0; \quad & F_{BC} \cdot 2.5 \text{ m} + F \cdot 2.8 \text{ m} - F \cdot 4.3 \text{ m} = 0 \\ \Rightarrow F_{BC} = \frac{3}{5} F = 300 \text{ N (V)} \end{aligned}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0; \quad F_{BF} - F = 0 \Rightarrow F_{BF} = 500 \text{ N (V)}$$

$$\begin{aligned} +\rightarrow \sum F_x = 0; \quad & -F_{FG} + F + F_{BC} = 0 \\ \Rightarrow F_{FG} = \frac{8}{5} F = 800 \text{ N (P)} \end{aligned}$$

Tai niveltuksen menetelmällä

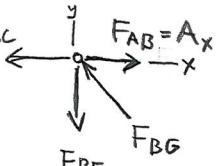
-Nivel G



$$\begin{aligned} +\uparrow \sum F_y = 0; \quad & G_y - \frac{5}{4} F_{BG} = 0 \\ \Rightarrow F_{BG} = \frac{\sqrt{41}}{5} G_y \end{aligned}$$

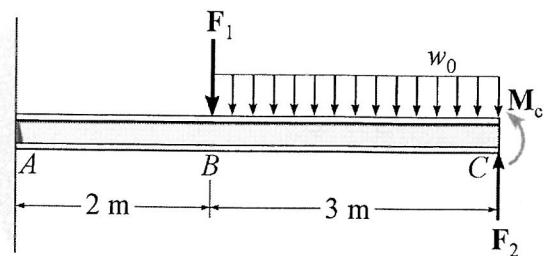
$$\begin{aligned} +\rightarrow \sum F_x = 0; \quad & F_{FG} - G_x + \frac{4}{\sqrt{41}} F_{BG} = 0 \\ \Rightarrow F_{FG} = \frac{8}{2} F_{BG} = 800 \text{ N (P)} \end{aligned}$$

-Nivel B



$$\begin{aligned} +\uparrow \sum F_y = 0; \quad & F_{BF} = G_y = 500 \text{ N (V)} \\ +\rightarrow \sum F_x = 0; \quad & A_x - F_{BC} - \frac{4}{\sqrt{41}} F_{BG} = 0 \\ \Rightarrow F_{BC} = 300 \text{ N (V)} \end{aligned}$$

3. Määritä seinään jääkästi kiinnitetyn palkin leikkausvoima- ja taivutusmomenttijakaumat ja piirrä kuviot, kun  $F_1 = 5 \text{ kN}$ ,  $F_2 = 4 \text{ kN}$ ,  $M_c = 6 \text{ kNm}$  ja  $w_0 = 2 \text{ kN/m}$ . Ilmoita lisäksi palkin rasitettuimmat poikkileikkaukset.



### 1. Palkin tukireaktiot

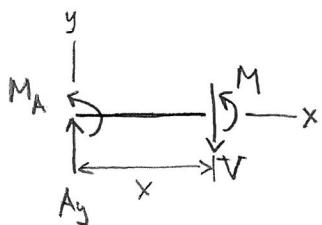
$$\rightarrow \sum F_x = 0; A_x = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0; A_y - F_1 + F_2 - w_0 \cdot 3m = 0 \\ \Rightarrow A_y = 7 \text{ kN}$$

$$\uparrow \sum M_A = 0; M_A - F_1 \cdot 2m - w_0 \cdot 3m \cdot (3,5m) \\ - F_2 \cdot 5m = 0 \\ \Rightarrow M_A = 5 \text{ kNm}$$

### 2. V-ja M-jakaumat

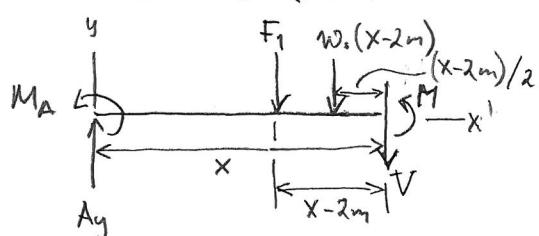
- Väli  $0 \leq x < 2m$ :



$$\uparrow \sum F_y = 0; A_y - V = 0 \Rightarrow V = 7 \text{ kN}$$

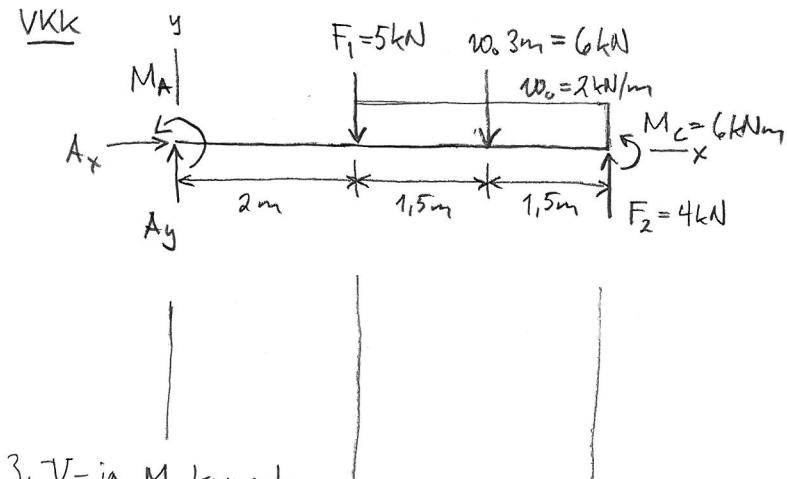
$$\uparrow \sum M = 0; M + M_A - A_y x = 0 \\ \Rightarrow M = \left\{ 7 \frac{x}{m} - 5 \right\} \text{kNm}$$

- Väli  $2m \leq x \leq 5m$ :

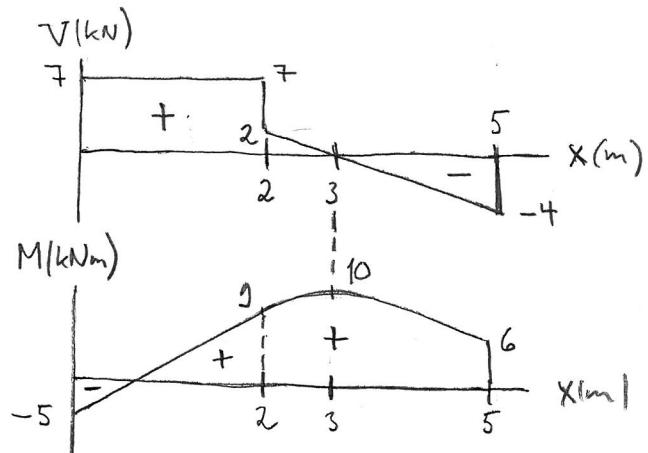


$$\uparrow \sum F_y = 0; A_y - F_1 - w_0 \cdot (x-2m) - V = 0 \\ \Rightarrow V = \left\{ -2 \frac{x}{m} + 6 \right\} \text{kN}$$

$$\uparrow \sum M = 0; M + M_A - A_y x + F_1 \cdot (x-2m) + w_0 \cdot (x-2m) \cdot \frac{1}{2} \cdot (x-2m) = 0 \\ \Rightarrow M = \left\{ -\left(\frac{x}{m}\right)^2 + 6 \frac{x}{m} + 1 \right\} \text{kNm}$$



### 3. V- ja M-kuviot



Min maksimi välillä  $2 < x < 5 \text{ m}$ :

$$-V = \left\{ -2 \frac{x}{m} + 6 \right\} \text{kN} = 0 \Rightarrow x = 3 \text{ m}$$

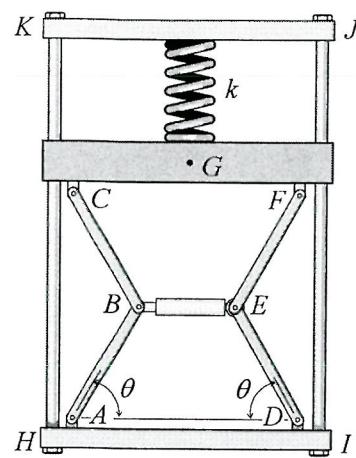
$$M(3 \text{ m}) = \left\{ -9 + 18 + 1 \right\} \text{kNm} = 10 \text{ kNm}$$

### 4. Rasitettuimmat poikkileikkaukset

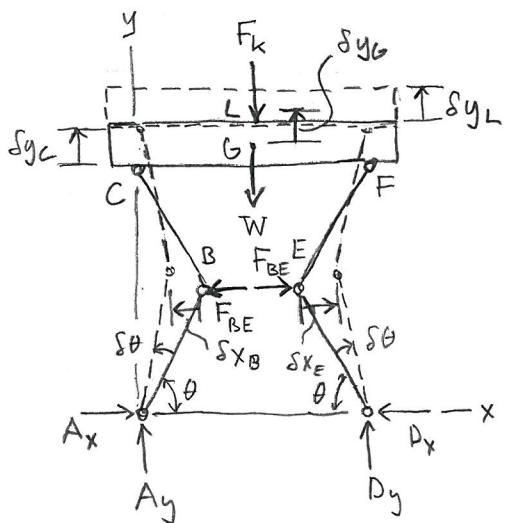
$$|V|_{\max} = 7 \text{ kN}, \text{ kun } 0 \leq x < 2 \text{ m}$$

$$|M|_{\max} = 10 \text{ kNm}, \text{ kun } x = 3 \text{ m}$$

4. Puristin koostuu neljästä nivelsauvasta  $AB$ ,  $BC$ ,  $DE$  ja  $EF$ , hydraulisesta sylinteristä  $BE$  ja palkista  $CF$ , joka liukuu kitkattomasti pystysuorassa suunnassa, sekä jäykästä tukirakenteesta  $HJK$ . Määritä jousen kokoonpuristamisessa vaikuttavien voimien tekemä virtuaalinen työ kulman  $\theta$  funktiona. Jousen jousivakio on  $k = 1 \text{ kN/m}$  ja se on venymätön, kun  $\theta = 45^\circ$ . Kunkin nivelsauvan pituus on  $0,4 \text{ m}$ , palkin paino  $400 \text{ N}$  ja painopiste pisteessä  $G$ . Sauvojen, hydraulisen sylinterin eikä jousen omaa painoa oteta huomioon. Mikä on hydraulisessa sylinterissä vaikuttavan voiman suuruus tasapainoasemassa, kun  $\theta = 60^\circ$ ?



### 1. Puristimen vkk ja virtuaalinen siirtymätila



$$\begin{aligned} n &= 3N - k = 3 \cdot 5 - (6 \cdot 2 + 2 \cdot 2) = 1 \\ F_k &= ks = k(y_L - y_G) = k(y_C - y_C) \end{aligned}$$

### 2. Virtuaaliset siirtymät ja jousivoima

$$x_B = 0,4 \sin \theta \Rightarrow \delta x_B = \{-0,4 \cos \theta\} \text{ m}$$

$$x_E = x_D - 0,4 \cos \theta \Rightarrow \delta x_E = \{0,4 \sin \theta\} \text{ m}$$

$$y_C = 2 \cdot 0,4 \sin \theta \Rightarrow \delta y_C = \{0,8 \cos \theta\} \text{ m}$$

$$\delta y_G = \delta y_L = \delta y_C, \text{ koska palkki on jäykki.}$$

$$F_k = k(y_C - y_C) = \{800 (\sin \theta - \sin 45^\circ)\} \text{ kN}$$

### 3. Virtuaalinen työ

$$\begin{aligned} SU &= (-F_{BE})\delta x_B + F_{BE}\delta x_E + (-W)\delta y_C + (-F_k)\delta y_C \\ &= \left\{ [0,8 \frac{F_{BE}}{N} \sin \theta - (320 + 640(\sin \theta - \frac{1}{\sqrt{2}}))] \cos \theta \right\} \delta \theta \end{aligned}$$

### 4. Tasapaino

$$SU = 0 \Leftrightarrow 0,8 \frac{F_{BE}}{N} \sin \theta - [320 + 640(\sin \theta - \frac{1}{\sqrt{2}})] \cos \theta = 0$$

$$\Rightarrow \text{kun } \theta = 60^\circ, \quad F_{BE} = 400 \left(1 - \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{3}}\right) N \approx 304 N$$