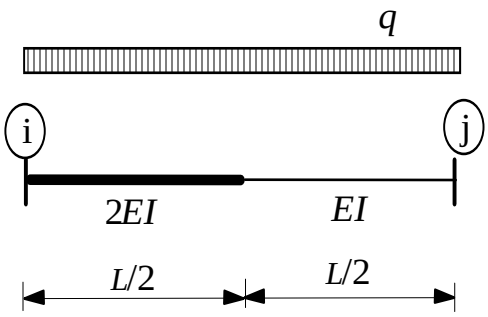
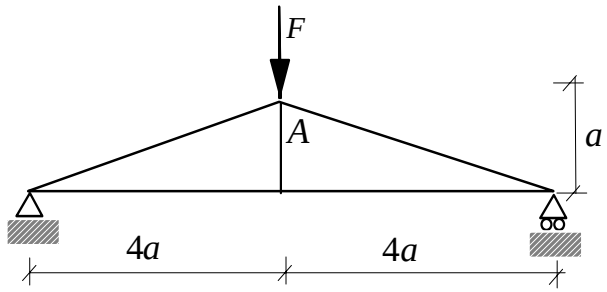
Rak-54.2100 RAKENTEIDEN MEKANIIKKA I
Tentti 17. 12. 2007

Kirjoita jokaiseen koepaperiin selvästi
- opintojakson nimi, koodi ja tentin päivämäärä
- kaikki nimesi puhuttelunimi alleviivattuna
- koulutusohjelma, opiskelijanumero, myös tarkistuskirjain
- milloin olet pakolliset kotitehtävät suorittanut sekä monettako kertaa olet tentissä

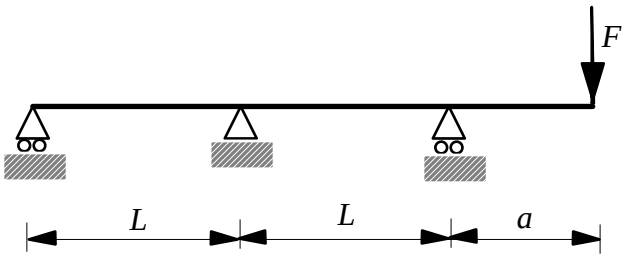
1. Tarkastellaan oheista sauvaa *i-j*. jonka pituus on *L*, ja jonka taivutusjäykkyys puolittuu sauvan keskellä kuvan mukaisesti arvosta 2*EI* arvoon *EI*. Määritä momenttimenetelmän sauvavakiot α_{ij} ja β_{ji}. Jos sauvaa kuormittaa tasanjakaantunut kuorma *q*, laske edelleen kuormitustermi α_{ij}^{o}.



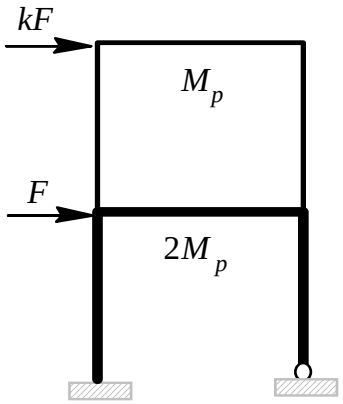
2. Määritä oheisen ristikon muodonmuutosenergia, kun sauvat on mitoitettu siten, että vedetyissä sauvoissa jännitys saa arvon σ ja puristetuissa -σ/2. Materiaalin kimmokeroin on *E*. Määritä lisäksi harjapisteen A pystysuora siirtymä.



3. Määritä oheisen jatkuvan palkin taivutusmomentti- ja leikkausvoimajakaumat. Palkin taivutusjäykkyys on *EI*.



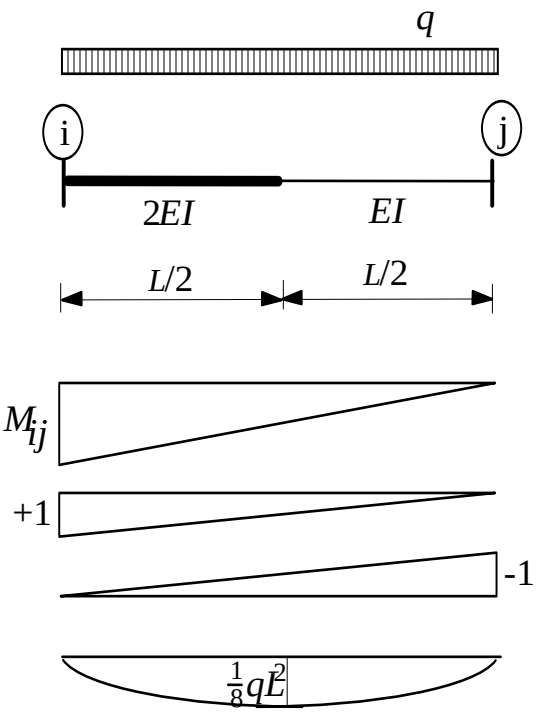
4. Oheisessa kaksikerroksisessa kehässä kaikkien sauvojen pituus on *L*. Kehän ”alakerran” sauvojen täysplastinen momentti on $2M_p$ ja ”yläkerran” vastaavasti M_p. Määritä rakenteen rajakuorma F_p, kun kuormituskerroin *k* saa arvon a) $k = 1$ ja b) $k = 0.5$. Osoita jälkimmäisessä tapauksessa, että on löydettävissä tasapainoehdot toteuttava taivutusmomenttijakauma, jossa myötöehtoa ei missään kohdin rikota.



Rak-54.101 RAKENTEIDEN MEKANIIKKA I

Tentti 17.12.2007

RATKAISUT



1. Tehtävä voidaan ratkaista mm. integroimalla

$$\alpha_{ij} = \int_0^{L/2} \frac{(1-x/L)^2}{2EI}\mathrm{d}x + \int_0^{L/2} \frac{(1/2-x/L)^2}{EI}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{L}{2EI}\left[-\frac{L}{3}(1-\frac{x}{L})^3\right]_0^{L/2} + \frac{L}{EI}\left[-\frac{L}{3}(\frac{1}{2}-\frac{x}{L})^3\right]_0^{L/2}$$

$$= \frac{L}{EI}\left(\frac{7}{48}+\frac{1}{24}\right) = \frac{3L}{16EI}$$

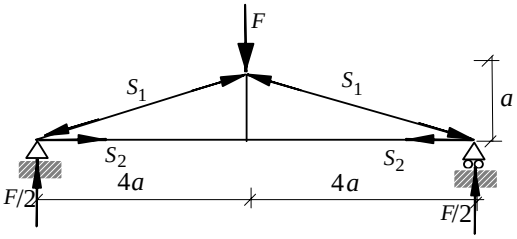
Simpsonin kaavaa soveltamalla

$$\beta_{ji} = \frac{L/2}{12EI}\left(0+4\frac{3}{4}\frac{1}{4}+(\frac{1}{2})^2\right) + \frac{L/2}{6EI}\left((\frac{1}{2})^2+4\frac{1}{2}\frac{3}{4}+0\right)$$

$$= \frac{L}{24EI}+\frac{L}{12EI} = \frac{L}{8EI}$$

tai taulukoita käyttämällä

$$\alpha_{ij}^{o} = \frac{1}{2EI}\frac{L}{2}\frac{qL^2}{96}\left(\frac{5}{2}+3\right)+\frac{1}{EI}\frac{5}{12}\frac{L}{2}\frac{qL^2}{8}\frac{1}{2} = \frac{21qL^3}{768EI}$$



2. Sauvavoimiksi saadaan nurkkien tasapainoehdoista

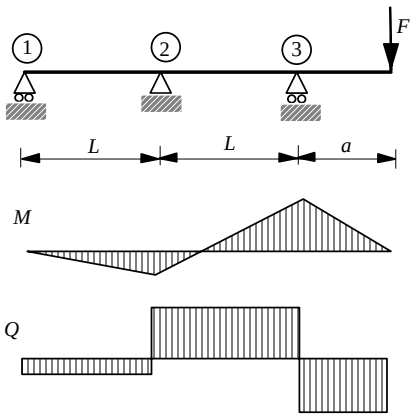
$S_1 = -\sqrt{17}F/2,\ S_2 = 2F,\ S_3 = 0$

ja $A_i = S_i/\sigma_i \ \Rightarrow A_1 = 2|S_1|/\sigma,\ A_2 = S_2/\sigma$

jolloin rakenteen muodonmuutosenergia on

$$U = \sum_{\text{sauvat}} \frac{S_i\sigma_i L_i}{2E} = \left(\frac{\sqrt{17}F\sqrt{17}a\sigma}{4E}+\frac{2F4a\sigma}{E}\right) = \frac{49Fa\sigma}{4E} \text{ ja } \frac{1}{2}F\delta_A = \frac{49Fa\sigma}{4E} \Rightarrow \delta_A = \frac{49a\sigma}{2E}$$

3. Sauvakiertymät $\varphi_{21} = \frac{L}{3EI}\underbrace{M_{21}}_{-M_2},\ \varphi_{23} = \frac{L}{3EI}\underbrace{M_{23}}_{M_2} - \frac{L}{6EI}\underbrace{M_{32}}_{Fa}$



sijoitettuna yhteensopivuusehtoon $\varphi_{21} = \varphi_{23}$ antaa $M_2 = Fa/4$

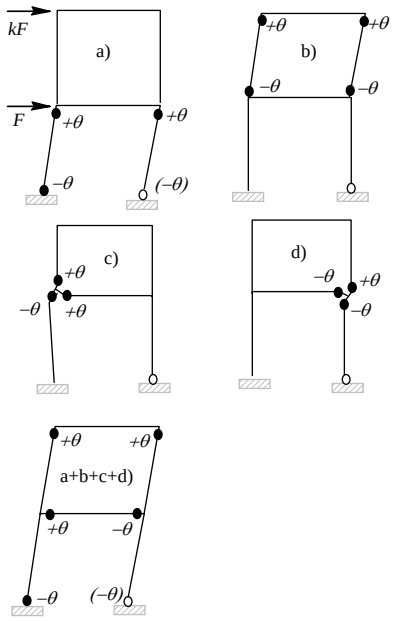
jolloin $M_{12} = 0,\ M_{23} = -M_{21} = Fa/4,\ M_{34} = -M_{32} = -Fa$

ja vastaavasti $Q_{12} = Q_{21} = Fa/4L,\ Q_{23} = Q_{32} = -5Fa/4L,\ Q_{34} = F$

4. Mekanismi a) $F\theta L(1+k) = 6M_p\theta \ \Rightarrow F = \frac{6M_p}{(1+k)L}$

Mekanismi b) $F\theta Lk = 4M_p\theta \ \Rightarrow F = 4M_p/kL$

Mekanismi a+b(+c+d)) $F\theta L(1+2k) = 8M_p\theta \;\Rightarrow\; F = \dfrac{8M_p}{(1+2k)L}$



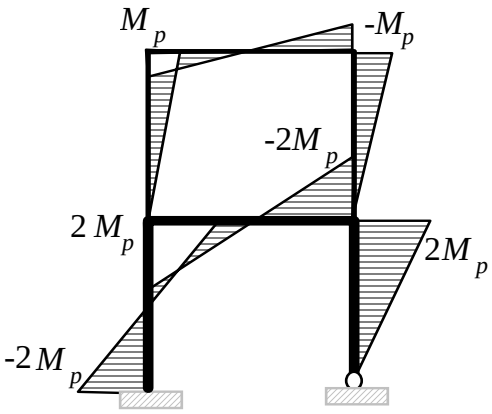
a) k=1 mekanismi a) $F = 3M_p / L$

mekanismi b) $F = 4M_p / L$

mekanismi a+b+c+d) $F = 8M_p / 3L = 2.67M_p / L = F_p$

b) k=.5 mekanismi a) $F = 4M_p / L = F_p$

mekanismi b) $F = 8M_p / L$

mekanismi a+b+c+d) $F = 4M_p / L = F_p$

Koska b-mekanismilla ja yhdistetyllä mekanismilla kummallakin saadaan sama rajakuorman arvo $F_p = 4M_p / L$, tarkoittaa se sitä, että täysplastisen momentin arvo saavutetaan kaikissa niissä rakenteen pisteissä, joissa kummassa tahansa mekanismissa syntyy nivel. Nurkkamekanismien avulla voidaan todeta, että ”yläkerran” pystysauvojen alapäiden taivutusmomentin arvo on nolla.