Aalto yliopiston teknillinen korkeakoulu
Mat-1.1110 Matematiikan peruskurssi C1 **Joensuu/Baarman**
Tentti 13.01.2011

Ylioppilaskirjoituksissa sallitut laskimet sallittu. Jokainen tehtävä on kuuden pisteen arvoinen. Osatehtävien painoarvo on yhtäsuuri.

Tentti

1. Ratkaise yhtälöryhmä $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, jossa $\mathbf{b} = [2 \quad 1 \quad 3]^T$ ja
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 6 & -2 & 9 \end{bmatrix}.$$

2. Osoita induktiolla, että kaikilla $n \in \mathbb{N}$
$$1 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

3. Muodosta sellainen 2×2-matriisi, jonka ominaisarvot ovat $\lambda_1 = 16, \lambda_2 = 11$ ja vastaavat ominaisvektorit $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}^T$ ja $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}^T$.

4. Laske
$$\text{a)} \int x^2 \sin x \, dx \qquad \text{b)} \int \frac{x-2}{x^2+x} dx.$$

5. Olkoon $a > 0$. Etsi käyrän $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ $(0 \leq t \leq 2\pi)$ pituus. Vihje: tiedosta $\sin\frac{t}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos t}{2}}$, kun $t \in [0, 2\pi]$ voi olla hyötyä.

1. välikoe

1. Osoita induktiolla, että kaikilla $n \in \mathbb{N}$
$$1 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

2. Määritellään relaatio R joukossa $\mathbb{Z}$ seuraavasti:
$$xRy \iff x \equiv y (\text{mod } 7).$$
Osoita, että R on ekvivalenssirelaatio.

3. Etsi a:n kertolaskun käänteisalkio tai -alkiot a^{-1}, jos olemassa, annetussa joukossa
$$\text{a)}\ a = 1 + i\sqrt{2};\ \mathbb{C} \qquad \text{b)}\ a = 83;\ \mathbb{Z}_{1111}.$$

4. Olkoon $r \geq 2$. Selvitä sykligraafien C_{2r} ja C_{2r-1} kromaattiset luvut $\chi(C_{2r})$ ja $\chi(C_{2r-1})$. (Muista, että alaindeksit $2r$ ja $2r-1$ tarkoittavat graafien solmujen lukumääriä).

2. välikoe

1. Ratkaise yhtälöryhmä $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, jossa $\mathbf{b} = [2 \quad 1 \quad 3]^T$ ja
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 6 & -2 & 9 \end{bmatrix}.$$

2. Laske matriisin B determinantti, kun
$$B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -4 \end{bmatrix}.$$
Onko matriisi B kääntyvä?

3. Olkoon vektorijoukko $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ lineaarisesti riippumaton vektoriavaruudessa V. Olkoon $\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$, $\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$ ja $\mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3$. Selvitä onko vektorijoukko $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ lineaarisesti riippumaton.

4. Muodosta sellainen 2×2-matriisi, jonka ominaisarvot ovat $\lambda_1 = 16$, $\lambda_2 = 11$ ja vastaavat ominaisvektorit $\mathbf{v}_1 = \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\right]^T$ ja $\mathbf{v}_2 = \left[-\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\right]^T$.

3. välikoe

1. Laske
$$\int x^2 \sin x \, dx.$$

2. a) Etsi käyrän $y = \frac{\ln x}{x}$, $x > 0$, käännepisteet.

   b) Etsi yhtälölle $\tan x = x$, kun $x \in]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$, sellainen likiarvo Newtonin menetelmällä, että vähintään kuusi ensimmäistä desimaalia ovat oikein. Kirjaa ylös Newtonin menetelmän iteraatit x_n, joilla ratkaisuun päädyit.

3. Etsi Taylorin polynomit $P_4(x)$ funktioille $f(x) = \ln(1 + x)$ ja $g(x) = \cosh x$, kun kehityskeskus $a = 0$. (Huomaa, että pyydetään vain Taylorin polynomeja, ei siis tarvitse antaa virhetermejä.)

4. Olkoon $a > 0$. Etsi käyrän $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ $(0 \leq t \leq 2\pi)$ pituus. Vihje: tiedosta $\sin \frac{t}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos t}{2}}$, kun $t \in [0, 2\pi]$ voi olla hyötyä.