Tfy-0.2124 Kvanttimekaniikka Tentti (5 op) 14.1.2011

1. Selitä lyhyesti, mitä seuraavilla käsitteillä tarkoitetaan (1 p/kohta). Selitys saa olla enintään kahden virkkeen mittainen ja se saa sisältää 2-3 kaavaa.
   a) Heisenbergin epämääräisyysperiaate.
   b) Bohrin vastaavuusperiaate.
   c) Itseadjungoitu operaattori.
   d) Pariteetti.
   e) Tunneloituminen.
   f) Tilatiheys.

2. Tarkastellaan m-massaista hiukkasta, joka liikkuu äärettömässä yksiulotteisessa potentiaalikuopassa, jolle $V = 0$, kun $0 \leq x \leq a$, muulloin $V = \infty$. Hiukkasen Hamiltonin operaattorin $\hat{H}$ (eli ajasta riippumattoman Schrödingerin yhtälön) ortonormeeratut ominaisfunktiot ja -arvot ovat
$$\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right), \quad E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2}, \quad n = 1, 2, \ldots$$
   Oletetaan, että hiukkasen normeerattu tilafunktio hetkellä $t = 0$ on
$$\Psi(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{14}}[3\varphi_1(x) + 2\varphi_2(x) + \varphi_3(x)].$$
   a) Ratkaise hiukkasen tilafunktio $\Psi(x, t)$ ajanhetkellä t. Onko tilafunktio edelleen normeerattu? Perustelut. (3 p.)
   b) Laske energian odotusarvo $\langle \hat{H} \rangle$. Onko $\hat{H}$:n odotusarvo liikevakio? Perustelut. (2 p.)
   c) Mitä energian arvoja ja millä todennäköisyyksillä voidaan energian yksittäisestä mittauksesta saada? (1 p.)

3. Tarkastellaan yksiulotteista harmonista oskillaattoria. Ns. lasku- ja nosto-operaattorit määritellään
$$\hat{a} = \frac{\beta}{\sqrt{2}}\left(\hat{x} + \frac{i\hat{p}}{m\omega_0}\right) \quad \text{ja} \quad \hat{a}^\dagger = \frac{\beta}{\sqrt{2}}\left(\hat{x} - \frac{i\hat{p}}{m\omega_0}\right),$$
   missä $\beta = \sqrt{m\omega_0/\hbar}$.
   a) Osoita, että peruskommutaattori $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$ ja Hamiltonin operaattori $\hat{H} = \hbar\omega_0(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2})$.
   b) Osoita, että lukumääräoperaattorin $\hat{N} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$ ominaisarvot $\lambda \geq 0$ ja että alin ominaisarvo $\lambda_m = 0$.
   c) Laske a- ja b-kohtien avulla harmonisen oskillaatorin energiaominaisarvot.

4. Taskatellaan pitkin x-akselia liikkuvan m-massaisen hiukkasen stationääristä sirontaa (hiukkasen energia $E > 0$) yksiulotteisesta δ-funktiopotentiaalikuopasta
$$V(x) = -\alpha\delta(x),$$
   missä vakio $\alpha > 0$. Oletetaan, että alueessa $x > 0$ ei esiinny liikettä negatiivisen x-akselin suuntaan. Laske heijastuskerroin R ja läpäisykerroin T ominaisenergian E funktiona.

5. Olkoon systeemi $\hat{L}_z$:n ortonormeeratussa ominaistilassa $\varphi_{\ell m}$ ominaisarvolla $\hbar m$ ja kulmaliikemäärän neliön L^2 arvolla $\hbar^2\ell(\ell + 1)$. Osoita, että odotusarvoille on voimassa
   a) $\langle L_x \rangle = \langle L_y \rangle = 0$, ja
   b) $\langle L_x^2 \rangle = \langle L_y^2 \rangle = \frac{1}{2}[\hbar^2\ell(\ell + 1) - m^2\hbar^2]$.

Merkitse nimesi, opiskelijanumerosi, koulutusohjelmasi, kurssikoodi ja kokeen päivämäärä jokaiseen suorituspaperiisi. Laskimien käyttö tentissä on kielletty.