Tfy-0.2124 Kvanttimekaniikka Tentti (5 op) 14.5.2010

1. Selitä lyhyesti, mitä seuraavilla käsitteillä tarkoitetaan (1 p/kohta). Selitys saa olla enintään kahden virkkeen mittainen ja se saa sisältää 2-3 kaavaa.
   a) Stationäärinen tila.
   b) Ominaisarvon degeneraatio.
   c) Ehrenfestin periaate.
   d) Tunneloituminen.
   e) Blochin aaltofunktio.
   f) Clebsch-Gordanin kertoimet.

2. Tarkastellaan kahden fysikaalisen observaabelin A ja B yleistettyä epämääräisyysperiaatetta. Määritellään $\varphi \equiv (\hat{A} - \langle A \rangle)\Psi$ ja $\psi \equiv (\hat{B} - \langle B \rangle)\Psi$. Koska $\hat{A}$ ja $\hat{B}$ ovat hermiittisiä operaattoreita, A:n varianssi voidaan kirjoittaa $\sigma_A^2 = \langle \Psi | (\hat{A} - \langle A \rangle)^2 \Psi \rangle = \langle (\hat{A} - \langle A \rangle)\Psi | (\hat{A} - \langle A \rangle)\Psi \rangle = \langle \varphi | \varphi \rangle$ ja vastaavasti B:n varianssi $\sigma_B^2 = \langle \psi | \psi \rangle$.
   a) Lähtien liikkeelle Cauchy-Schwartzin epäyhtälöstä $\langle \varphi | \varphi \rangle \langle \psi | \psi \rangle \geq |\langle \varphi | \psi \rangle|^2$ johda kahden ei-kommutoivan hermiittisen operaattorin $\hat{A}$ ja $\hat{B}$ varianssien tulolle epäyhtälö

$$\sigma_A^2 \sigma_B^2 \geq |\tfrac{1}{2i} \langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle|^2,$$

   missä $[\hat{A}, \hat{B}]$ on operaattorien $\hat{A}$ ja $\hat{B}$ välinen kommutaattori. (5 p)
   b) Kirjoita edellisen kohdan tulosta käyttäen Heisenbergin epämääräisyysperiaate x-akselia pitkin liikkuvan hiukkasen paikan x ja liikemäärän p välille. (1 p)

3. Tarkastellaan yksiulotteista harmonista oskillaattoria. Ns. lasku- ja nosto-operaattorit määritellään

$$\hat{a} = \frac{\beta}{\sqrt{2}} \left(\hat{x} + \frac{i\hat{p}}{m\omega_0} \right) \quad \text{ja} \quad \hat{a}^\dagger = \frac{\beta}{\sqrt{2}} \left(\hat{x} - \frac{i\hat{p}}{m\omega_0} \right),$$

   missä $\beta = \sqrt{m\omega_0/\hbar}$. Tällöin harmonisen oskillaattorin peruskommutaattori on $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$ ja Hamiltonin operaattori $\hat{H} = \hbar\omega_0(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2})$. Harmonisen oskillaattorin ominaistilat φ_n voidaan luoda alimmasta ominaistilasta φ_0 relaatiolla

$$\varphi_n = \frac{1}{\sqrt{n!}} (\hat{a}^\dagger)^n \varphi_0,$$

   jotka ovat ortonormeeratut, eli $\langle \varphi_n | \varphi_m \rangle = \delta_{nm}$.
   a) Osoita, että normeeratuille ominaistiloille on voimassa

$$\hat{a}\,\varphi_n = \sqrt{n}\,\varphi_{n-1} \quad \text{ja} \quad \hat{a}^\dagger \varphi_n = \sqrt{n+1}\,\varphi_{n+1}.$$

   b) Oletetaan, että hiukkasen normeerattu tilafunktio hetkellä $t = 0$ on

$$\Psi(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\varphi_0(x) + \varphi_1(x)].$$

   Laske paikan odotusarvo $\langle x \rangle$ hetkellä $t > 0$.

φ_0 φ_1

$\varphi_1 = \hat{a}^\dagger \varphi_0$

KÄÄNNÄ

$$\hat{F} = \frac{\hat{F} - \hat{F}^\dagger}{2} + i\,\frac{\hat{F} + \hat{F}^\dagger}{2i}$$

φ

$$\varphi_{n-1} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}!\,\sqrt{n}} (\hat{a}^\dagger)^{n-1} \varphi_0$$

4. Tarkastellaan m-massaisen hiukkasen sidottuja tiloja ($E < 0$) yksiulotteisessa δ-funktiopotentiaalissa

$$V(x) = -\alpha[\delta(x+a) + \delta(x-a)],$$

missä α ja a ovat positiivisia vakioita. Ratkaise systeemin stationääriset tilat $\psi(x)$ ja niitä vastaavat energian ominaisarvot E. Hahmottele hiukkasen esiintymistodennäköisyystiheys $|\psi(x)|^2$ kullekin tilalle.

5. Johda kulmaliikemääräoperaattorien $\hat{L}^2$ ja $\hat{L}_z$ ominaisarvot $L^2 = \hbar^2\ell(\ell+1)$ ja $L_z = \hbar m$, missä $\ell = 0, 1, 2, \ldots$ ja $m = -\ell, -\ell+1, \ldots, \ell-1, \ell$.
Ohje: Määritellään operaattorit $\hat{L}_\pm = \hat{L}_x \pm i\hat{L}_y$. Tarkastele, miten operaattorit $\hat{L}_+$ ja $\hat{L}_-$ vaikuttavat systeemin tilaan, ja päättele tuloksista kysytyt ominaisarvot. Apuna voi käyttää relaatioita

$$\begin{aligned}
&[\hat{L}_x, \hat{L}_y] = i\hbar\hat{L}_z,\\
&[\hat{L}^2, \hat{L}_z] = 0,\\
&[\hat{L}_z, \hat{L}_\pm] = \pm\hbar\hat{L}_\pm,\\
&[\hat{L}^2, \hat{L}_\pm] = 0,\\
&[\hat{L}_+, \hat{L}_-] = 2\hbar\hat{L}_z,\\
&\hat{L}^2 = \hat{L}_\mp\hat{L}_\pm + \hat{L}_z^2 \pm \hbar\hat{L}_z.
\end{aligned}$$

Merkitse nimesi, opiskelijanumerosi (myös kirjain), koulutusohjelmasi, kurssikoodi ja kokeen päivämäärä jokaiseen suorituspaperiisi. Laskimien käyttö tentissä on kielletty.