

Mat-1.1310 Matematiikan peruskurssi K1

Tentti/uusintavälikoe 13.1.2011

Täytä selvästi *jokaiseen vastauspaperiin* kaikki otsaketiedot. Merkitse kurssikoodi-kohtaan opintojakson numero, nimi ja onko kyseessä tentti vai välikoe. Tutkinto-ohjelmakoodit ovat ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KTA, KON, MAR, MTE, PUU, RRT, TFM, TIK, TLT, TUO, YYT.

Kokeessa saa käyttää ylioppilaskirjoituksissa sallittua laskinta, ei muita apuvälineitä. Koeaika on 3h välikokeeseen, 4h tenttiin.

Valitse joko tentti tai yksi välikoe.

TENTTI: Valitse viisi (5) tehtävää seuraavista: 2, 4, 6, 8, 10 tai 12

1. välikoe:

- a) Olkoot $z = 2 - i$ ja $w = -1 + 2i$. Määritä kompleksilukujen $z + w$ ja zw polaariesitykset muodossa $re^{i\varphi}$.
b) Johda sinin ja kosinin yhteenlaskukaavat käyttämällä Eulerin kaavaa yhtälön $e^{i(x+y)} = e^{ix}e^{iy}$ kaikkiin kolmeen eksponenttitermiin ja vertaamalla Re- ja Im-osia.

- Olkoon $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $\mathbf{u} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$ ja $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$.

a) Laske

$$\mathbf{w} = \mathbf{a} - \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{u}}{|\mathbf{u}|^2} \mathbf{u}$$

ja osoita, että $\mathbf{w} \perp \mathbf{u}$.

b) Sievennä $\mathbf{a} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{v})$.

- Määritä tasojen $x + 2y - z = 3$ ja $x - 2y + 3z = 2$ leikkaussuoran yhtälö muodossa $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$, missä $t \in \mathbf{R}$.

- Olkoon

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

ja $\mathbf{c} = [2, 2, 1]^T$. Ratkaise yhtälöryhmä $B\mathbf{x} = A\mathbf{c}$.

Vihje: Tarkoitus on laskea aluksi $A\mathbf{c}$.

2. välikoe:

- a) Laske determinantti

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

b) Määritä 1. välikokeen tehtävän 4 matriisin A käänteismatriisi ja ratkaise sitä käyttämällä yhtälöryhmä $A\mathbf{y} = \mathbf{c}$, kun $\mathbf{c} = [4, 4, 2]^T$.

Käännä!

6. Olkoon A kuten 1. välikokeen tehtävässä 4.

a) Määritä matriisin A karakteristinen yhtälö $p(\lambda) = 0$.

b) Osoita, että luku $\lambda = -1$ on matriisin A ominaisarvo ja määritä sitä vastaava ominaisvektori.

7. Olkoon $a < 1$ ja $a \neq 0$. Toisen asteen yhtälön $ax^2 - 2x + 1 = 0$ ratkaisut ovat tällöin muotoa

$$x = x(a) = \frac{1 - \sqrt{1-a}}{a} \quad \text{ja} \quad y = y(a) = \frac{1 + \sqrt{1-a}}{a}.$$

Määritä raja-arvot

$$\lim_{a \rightarrow 0} x(a) \quad \text{ja} \quad \lim_{a \rightarrow 0} y(a).$$

8. Määritä ellipsin $x^2 + 4y^2 = 5$ tangentin yhtälö pisteessä $(1, -1)$.

3. välikoe:

9. a) Määritä yhtälön $x^3 = \cos x$ ratkaisun kolmidesimaalinen likiarvo kiintopisteiterointia käyttämällä.

b) Esitä hyperbolisten funktioiden $\sinh x$, $\cosh x$ määritelmät ja laske niiden sekä funktion

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

derivaatat.

10. Määritä lausekkeen $e^x \sin(x)$ maksimi ja minimi välillä $x \in [-\pi, \pi]$.

11. Eräänä päivänä ilman lämpötila $f(t)$ hetkellä t mitattiin kahden tunnin välein (alkaen keskiyöstä), jolloin tulokseksi saatiin arvot 10, 10, 12, 14, 16, 18, 21, 20, 19, 18, 16, 16, 14 astetta. Arvioi kyseisen vuorokauden keskilämpötilaa

$$\frac{1}{24} \int_0^{24} f(t) dt$$

käyttämällä Simpsonin sääntöä.

12. a) Määritä integraalifunktio

$$\int \frac{x+1}{(x-1)(x+2)} dx.$$

b) Laske integraali

$$\int_0^{\pi^2} \sin(\sqrt{x}) dx$$

sijoittamalla aluksi $x = t^2$.

Lisätietoja: $h = \Delta x =$ askelpituus, integraalilla $\int_a^b f(x) dx$ approksimaatiot

$$T_n = h(f(x_0)/2 + f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{n-1}) + f(x_n)/2) \text{ ja}$$

$$S_n = \frac{h}{3}(f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \cdots + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)).$$

Käännä!