Mat-1.2620 Sovellettu todennäköisyyslaskenta B

1. välikoe 29.10.2010 / Kibble

Kirjoita selvästi *jokaiseen koepaperiin* seuraavat tiedot:

- Mat-1.2620 SovTnB 1. vk 29.10.2010
- opiskelijanumero + kirjain
- TEKSTATEN sukunimi ja kaikki etunimet
- koulutusohjelma ja vuosikurssi
- mahdolliset entiset nimet ja koulutusohjelmat
- nimikirjoitus

Sallitut apuvälineet: ***Funktiolaskin* ja Mellinin *kaava*- ja *taulukkokokoelmat*.**

Vastausohje: **Vastaa *lyhyesti* ja *ytimekkäästi*, mutta *perustele ratkaisusi*. Pelkkä lukuarvo vastauksena *ei anna* pisteitä.**

1. (a) Olkoon Pr(A) = 0.5 ja Pr(A∪B) = 0.6. Määritä tapahtuman B todennäköisyys, kun

Tehtävä 1: A ja B ovat toisensa poissulkevia.

Tehtävä 2: Pr(A|B) = 0.4.

<u>**Ratkaisu kysymykseen 1 (a):**</u>

Yleisen yhteenlaskusäännön mukaan

Pr(A∪B) = Pr(A) + Pr(B) – Pr(A∩B) (*)

Tehtävä 1: Jos A ja B ovat toisensa poissulkevia eli A∩B=∅, on Pr(A∩B) = 0.

Joten Pr(B) = Pr(A∪B) - Pr(A) = 0.6 – 0.5 = 0.1

Tehtävä 2: Tapahtuman A ehdollinen todennäköisyys ehdolla B on

$\Pr(A\,|\,B) = \dfrac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)}$ joten käyttämällä (*)

$$\Pr(B) = \frac{\Pr(A) - \Pr(A \cup B)}{\Pr(A\,|\,B) - 1} = \frac{0.5 - 0.6}{0.4 - 1} = \frac{1}{6}$$

(b) Eräässä tentissä annetaan kaksi monivalintakysymystä, ensimmäisessä kysymyksessä on kolme vastausvaihtoehtoa joista vain yksi on oikea ja toisessa kysymyksessä on viisi vastausvaihtoehtoa joista vain yksi on oikea. Valitset toisistaan riippumatta molempiin kysymyksiin vastauksen satunnaisesti, eli tietyssä kysymyksessä on kaikilla vastausvaihtoehdoilla sama todennäköisyys tulla valituksi. Mikä on todennäköisyys

Tehtävä 1: että valitset oikean vastauksen molempiin kysymyksiin?

Tehtävä 2: että valitset oikean vastauksen ensimmäiseen kysymykseen mutta väärän vastauksen toiseen kysymykseen?

Tehtävä 3: että valitset ainakin yhden oikean vastauksen?

Ratkaisu kysymykseen 1 (b):

Olkoot E= tapahtuma että valitset oikean vastauksen ensimmäiseen kysymykseen

T= tapahtuma että valitset oikean vastauksen toiseen kysymykseen

Tehtävä 1:

Pr(E∩T) = Pr(E) Pr(T) = 1/3 x 1/5 = 1/15 koska tapahtumat E ja T ovat riippumattomia.

Tehtävä 2:

$\Pr(E \cap T^c) = \Pr(E)\Pr(T^c) = \frac{1}{3}.\frac{4}{5} = \frac{4}{15}$ koska E ja T:n komplementti ovat riippumattomia

Tehtävä 3:

Pr(E∪T) = Pr(E) + Pr(T) – Pr(E∩T) = 1/3 + 1/5 – 1/15 = 7/15 yleisen yhteenlaskusäännön mukaan

---

2. Arvioidaan että 1% väestöstä on eräs tauti. Kyseisen taudin toteamiseksi on kehitetty testi, joka ei aina anna oikeata tulosta siten, että jos henkilöllä on tauti niin testi antaa tähän viittaavan tuloksen todennäköisyydellä 0.95. Jos henkilöllä ei ole tautia niin testi antaa tautiin viittaavan tuloksen todennäköisyydellä 0.06.

Tehtävä 1: Mikä on todennäköisyys että väestöstä satunnaisesti poimittu henkilö saa tautiin viittaavan tuloksen?

Tehtävä 2: Mikä on todennäköisyys, että tietyllä henkilöllä on tauti, jos testi antaa tähän viittaavan tuloksen?

Ratkaisu kysymykseen 2:

D = henkilöllä on tauti

F = henkilöllä ei ole tauti

P = testi antaa tautiin viittaavan tuloksen

Pr(D) = 0.01

Pr(P|D) = 0.95

Pr(P|F) = 0.06

Tehtävä 1: Kokonaistodennäköisyyden kaava:

$$\begin{aligned} &\Pr(P) = \Pr(D)\Pr(P \mid D) + \Pr(F)\Pr(P \mid F) \\ &= (0.01)(0.95) + (0.99)(0.06) \\ &= 0.069 \end{aligned}$$

Tehtävä 2: Bayesin kaava:

$$\Pr(D \mid P) = \frac{\Pr(P \mid D)\Pr(D)}{\Pr(P)} = \frac{(0.95)(0.01)}{0.069} = 0.138$$

----

3. Pakkauksessa on 110 tuotetta, joista 25 on viallisia.

Tehtävä 1: Poimitaan pakkauksesta 5 tuotetta tarkastettavaksi ilman takaisinpanoa. Mikä on todennäköisyys, että tarkastettujen joukossa on tasan 1 viallinen tuote?

Tehtävä 2: Poimitaan pakkauksesta 5 tuotetta tarkastettavaksi takaisinpanolla. Mikä on todennäköisyys, että tarkastettujen joukossa on ainakin 1 viallinen tuote?

Ratkaisu kysymykseen 3:

Olkoon satunnaismuuttuja X viallisten tuotteiden lukumäärä tarkastettujen viiden tuotteen joukossa. Satunnaismuuttujan X jakauma riippuu siitä poimitaanko otos ilman takaisinpanoa vai takaisinpanolla. Ensimmäisessä tehtävässä X noudattaa hypergeometrista jakaumaa ja toisessa tehtävässä binomijakaumaa.

Tehtävä 1: X~HyperGeom(110,25,5) jolloin pistetodennäköisyysfunktio:

$$f(x) = \frac{\binom{25}{x}\binom{110-25}{5-x}}{\binom{110}{5}}$$

Ja pyydetty todennäköisyys:

$$\Pr(X = 1) = f(1) = \frac{\binom{25}{1}\binom{110-25}{5-1}}{\binom{110}{5}} \approx 0.414$$

Tehtävä 2: Tarkastellaan komplementtitapahtumaa ’ei yhtään viallista’. Koska X~Bin(5, 25/110), saadaan pistetodennäköisyysfunktio:

$$f(x) = \binom{5}{x} 0.227^{x} 0.773^{5-x}$$

ja pyydetty todennäköisyys:

$$1 - f(0) = 1 - \binom{5}{0} 0.227^{0} \cdot 0.773^{5-0} \approx 0.724$$

4. Heität virheetöntä noppaa 24000 kertaa. Mikä on todennäköisyys, että kuutosten lukumäärä on suljetulla välillä [3920, 4160]? Käytä normaalijakauma-approksimaatiota.

Ratkaisu kysymykseen 4: Kuutosten määrä heitossa X~Bin(24000,1/6), joten E(X)= np =4000. Keskeisen raja-arvolauseen mukaan satunnaismuuttuja

$$Z = \frac{X - E(X)}{\sigma} \sim_a N(0,1)$$

Jossa E(X) = 4000 ja σ = √(npq) ≈ 57.74. Lasketaan tulos normaalijakauman avulla:

$$\Pr(3920 \le X \le 4160) \approx \Pr\left(\frac{3920-4000}{57.74} \le Z \le \frac{4160-4000}{57.74}\right)$$
$$= \Pr(-1.39 \le Z \le 2.77) = \Pr(Z \le 2.77) - \Pr(Z \le -1.39)$$
$$= 0.9972 - 0.0823 = 0.9149$$