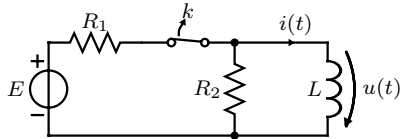


Laske tehtävät 1 – 2 eri paperille kuin tehtävät 3 – 5. Muista kirjoittaa jokaiseen paperiin **selvästi** nimi, opiskelijanumero, kurssin nimi ja koodi.

Tehtävät lasketaan korkeakoulun koepaperille. Muita papereita ei tarkasteta.

1.



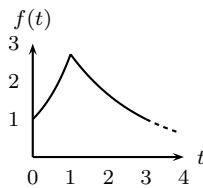
Kytкин avataan, kun $t = 0$. E on tasajännitelähde.

a) Laske kelan virta $i(0)$ jatkuvuustilassa ennen kytkimen avaamista.

b) Hahmottele kelan virta $i(t)$ ajan funktiona.

c) Hahmottele kelan jännite $u(t)$ ajan funktiona.

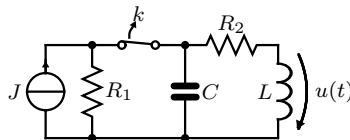
2.



Muodosta funktion $f(t)$ Laplace-muunnos $F(s)$, kun

$$f(t) = \begin{cases} e^t & , \text{ kun } 0 \leq t < 1 \\ e^{-(t-5)/4} & , \text{ kun } t \geq 1 \end{cases}$$

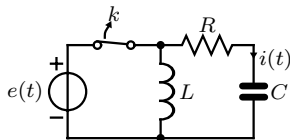
3.



Tasavirtalähteen syöttämä piiri on jatkuvuustilassa ennen kytkimen avaamista. Laske jännite $u(t)$ kytkimen avaamisen jälkeen.

$$J = 0,3 \text{ A} \quad C = 2,5 \mu\text{F} \quad L = 50 \text{ mH} \\ R_1 = 200 \Omega \quad R_2 = 300 \Omega$$

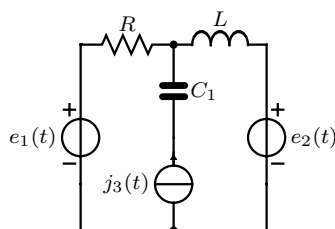
4.



Kuvan piiri on jatkuvuustilassa ennen hetkeä $t = 0$, jolloin kytkin k avataan. Laske virta $i(t)$ kytkimen avaamisen jälkeen. $e(t) = 10 \sin(\omega t - 45^\circ)$ V

$$\omega = 1000 \text{ rad/s} \quad R = 2 \Omega \quad L = 10 \text{ mH} \\ C = 1 \text{ mF}$$

5.



Laske kuvan jatkuvuustilassa olevassa piirissä vastuksen virta $i_R(t)$ ajan funktiona sekä vastuksessa lämmöksi muuttuva teho P_R .

$$e_1(t) = 10 \sin(\omega t) \text{ V}$$

$$e_2(t) = 5 \sin(\omega t + 30^\circ) \text{ A}$$

$$j_3(t) = 2 \sin(2\omega t + 60^\circ) \text{ A}$$

$$\omega = 300 \text{ rad/s}$$

$$R = 5 \Omega \quad L = 40 \text{ mH} \quad C = 20 \text{ mF}$$

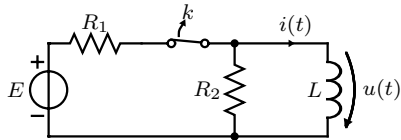
Tutkintosääntö antaa mahdollisuuden järjestää lisäharjoitusta niille opiskelijoille, jotka ovat saaneet kolmesti hylätyn arvosanan välikokeista tai tentistä. Tämä tarkoittaa sitä, että saatuaan kolme nollaa, opiskelijan on palautettava laskettuna 20 assistentin määräämää lisätehtävää ennen seuraavaan tenttiin tai välikokeeseen osallistumista. Välikokeet ja välikokeen uusinta tai uusintatilaisuudessa tehty tentti lasketaan yhdeksi yritykseksi. Yksittäinen välikoe lasketaan puolikkaaksi suorituskerraksi.

Läsnäolo koetilaisuudessa lasketaan yritykseksi, samoin tenttiin ilmoittautuminen.

Laplace-muunnostaulukko

Määritelmä		Muunnospareja	
	$f(t)$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$	
1.		$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$	
Laplace-muunnoksen ominaisuuksia			
	$f(t)$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$	
2.	$A_1 f_1(t) + A_2 f_2(t)$	$A_1 F_1(s) + A_2 F_2(s)$	15.
3.	$\frac{d}{dt} f(t)$	$sF(s) - f(0)$	16.
4.	$\frac{d^n}{dt^n} f(t)$	$s^n F(s) - \sum_{i=1}^n s^{n-i} f^{(i-1)}(0)$	17.
5.	$\int_0^t f(\tau) d\tau$	$\frac{1}{s} F(s)$	18.
6.	$(-t)^n f(t)$	$\frac{d^n}{ds^n} F(s)$	19.
7.	$f(t-a)\varepsilon(t-a)$	$e^{-as} F(s)$	20.
8.	$f(t+a)$	$e^{as} (F(s) - \int_0^a e^{-st} f(t) dt)$	21.
9.	$e^{-at} f(t)$	$F(s+a)$	22.
10.	$f(at)$	$\frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$	23.
11.	jaksollinen funktio $f(t) = f(t+T)$	$\frac{F_1(s)}{1 - e^{-sT}}$, $F_1(s)$ = yhden jakson muunnos.	24.
12.	$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau$	$F_1(s) F_2(s)$	25.
13.	$f(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$		26.
14.	$f(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$, jos loppuarvo on olemassa		27.
			28.
			29.

0.1



Kytkin avataan, kun $t = 0$. E on tasajännitelähde.

a) Laske kelan virta $i(0)$ jatkuvuustilassa ennen kytkimen avaamista.

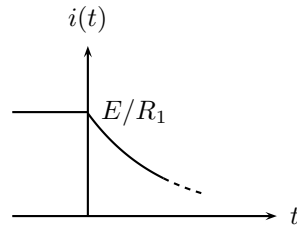
b) Hahmottele kelan virta $i(t)$ ajan funktiona.

c) Hahmottele kelan jännite $u(t)$ ajan funktiona.

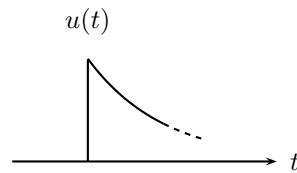
a)

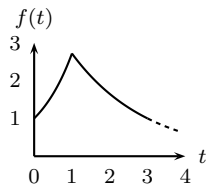
$$i(0) = I_{L0} = \frac{E}{R_1}$$

b) Kelan virta on jatkuva. Ennen kytkimen avaamista virta on alkuarvon suuruinen ja lähestyy eksponentiaalisesti nollaa kytkimen avaamisen jälkeen.



c) Kelan jännite voi muuttua äkillisesti. Ennen kytkimen avaamista jännite on nolla, jännite hyppää yhtäkkiä kun kytkin avataan ja laskee sen jälkeen eksponentiaalisesti nollaan.





Muodosta funktion $f(t)$ Laplace-muunnos $F(s)$, kun

$$f(t) = \begin{cases} e^t & , \text{ kun } 0 \leq t < 1 \\ e^{-(t-5)/4} & , \text{ kun } t \geq 1 \end{cases}$$

Kirjoitetaan paloittain määritellylle funktiolle lauseke askelfunktioiden avulla:

$$f(t) = e^t [\varepsilon(t) - \varepsilon(t-1)] + e^{-(t-5)/4} \varepsilon(t-1).$$

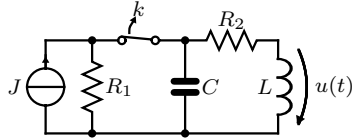
Muotoillaan lauseketta niin, että eksponenttifunktioihin ja askelfunktioihin saadaan sama viive:

$$f(t) = e^t \varepsilon(t) - e \cdot e^{t-1} \varepsilon(t-1) + e \cdot e^{-(t-1)/4} \varepsilon(t-1).$$

Funktion Laplace-muunnokseen tarvitaan eksponenttifunktion muunnosta (kaava 19) ja viivästyssääntöä (kaava 7):

$$F(s) = \frac{1}{s-1} - e \cdot e^{-s} \frac{1}{s-1} + e \cdot e^{-s} \frac{1}{s + \frac{1}{4}} = \frac{1}{s-1} + e^{1-s} \left(\frac{1}{s + \frac{1}{4}} - \frac{1}{s-1} \right).$$

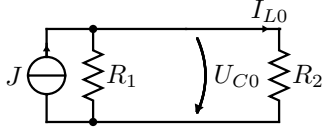
0.3



Tasavirtalähteen syöttämä piiri on jatkuvuustilassa ennen kytkimen avaamista. Laske jännite $u(t)$ kytkimen avaamisen jälkeen.

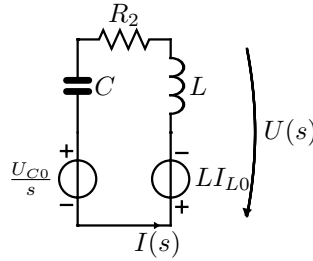
$$J = 0,3 \text{ A} \quad C = 2,5 \mu\text{F} \quad L = 50 \text{ mH}$$

$$R_1 = 200 \Omega \quad R_2 = 300 \Omega.$$



$$I_{L0} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} J = 0,12 \text{ A}$$

$$U_{C0} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} J = 36 \text{ V}$$



$$I(s) = \frac{LI_{L0} + \frac{U_{C0}}{s}}{\frac{1}{sC} + sL + R} = \frac{sLCI_{L0} + U_{C0}C}{s^2LC + sRC + 1} = \frac{s \cdot 1,5 \cdot 10^{-8} + 9 \cdot 10^{-5}}{s^2 \cdot 1,25 \cdot 10^{-7} + s \cdot 7,5 \cdot 10^{-4} + 1}$$

$$= \frac{0,12s + 720}{s^2 + 6000s + 8 \cdot 10^6}$$

$$U(s) = sLI(s) - LI_{L0} = \frac{0,006s^2 + 36s}{s^2 + 6000s + 8 \cdot 10^6} - 0,006 = \frac{-48000}{s^2 + 6000s + 8 \cdot 10^6}$$

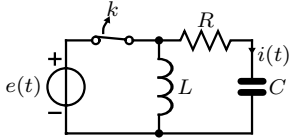
Funktiolla on reaaliset nollakohdat eli osamurtokehitelmäksi saadaan:

$$U(s) = -24 \cdot \left[\frac{1}{s + 2000} - \frac{1}{s + 4000} \right]$$

Käänteismuunnos:

$$\Rightarrow u(t) = -24 \cdot (e^{-2000t} - e^{-4000t}) \text{ V}, \quad \text{kun } t \geq 0$$

0.4



Kuvan piiri on jatkuvuustilassa ennen hetkeä $t = 0$, jolloin kytkin k avataan. Laske virta $i(t)$ kytkimen avaamisen jälkeen. $e(t) = 10 \sin(\omega t - 45^\circ)$ V

$$\omega = 1000 \text{ rad/s} \quad R = 2 \text{ } \Omega \quad L = 10 \text{ mH} \\ C = 1 \text{ mF.}$$

Ratkaistaan alkuarvot osoitinlaskennalla.
Kelan virta saadaan suoraan Ohmin laista

$$I_{L0} = \frac{E}{j\omega L} = \frac{\frac{10}{\sqrt{2}} / -45^\circ}{j10} = \frac{1}{\sqrt{2}} / -135^\circ$$

ja kondensaattorin jännite jännitteenjakokaavasta

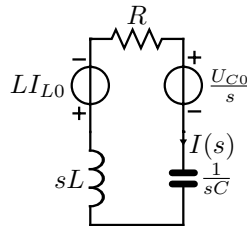
$$U_{C0} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} E = \frac{E}{1 + j\omega CR} = \frac{\frac{10}{\sqrt{2}} / -45^\circ}{1 + j2} = \sqrt{10} / -108,43^\circ.$$

Ajan funktioiksi muuttamalla saadaan laskettua alkuarvot hetkellä $t = 0$:

$$i(t) = \sin(\omega t - 135^\circ) \Rightarrow I_{L0} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ A}$$

$$u(t) = \sqrt{20} \sin(\omega t - 108,43^\circ) \Rightarrow U_{C0} = -3\sqrt{2} \text{ V}$$

Laplace-muunnetaan piiri kytkimen avaamisen jälkeen:



$$I(s) = -\frac{LI_{L0} + \frac{U_{C0}}{s}}{R + sL + \frac{1}{sC}} = -\frac{sCLI_{L0} + CU_{C0}}{1 + sCR + s^2LC} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{10^{-5}s + 6 \cdot 10^{-3}}{1 + 2 \cdot 10^{-3}s + 10^{-5}s^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{s + 600}{s^2 + 200s + 100000}.$$

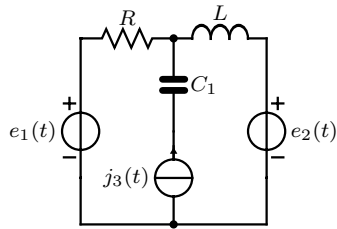
Muokataan käänteismuunnettava lauseke sopivaan muotoon:

$$I(s) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{s + 100}{(s + 100)^2 + (300)^2} + \frac{500}{(s + 100)^2 + (300)^2} \right] = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{s + 100}{(s + 100)^2 + (300)^2} + \frac{\frac{5}{3} \cdot 300}{(s + 100)^2 + (300)^2} \right]$$

Käänteismuunnos:

$$i(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-100t} \left[\cos(300t) + \frac{5}{3} \sin(300t) \right] \varepsilon(t)$$

0.5



Laske kuvan jatkuvuustilassa olevassa piirissä vastuksen virta $i_R(t)$ ajan funktiona sekä vastuksessa lämmöksi muuttuva teho P_R .

$$e_1(t) = 10 \sin(\omega t) \text{ V}$$

$$e_2(t) = 5 \sin(\omega t + 30^\circ) \text{ A}$$

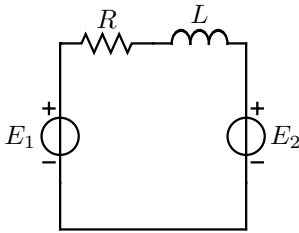
$$j_3(t) = 2 \sin(2\omega t + 60^\circ) \text{ A}$$

$$\omega = 300 \text{ rad/s}$$

$$R = 5 \ \Omega \quad L = 40 \text{ mH} \quad C = 20 \text{ mF.}$$

Käsitellään taajuudet erikseen.

Taajuudella ω piirissä vaikuttaa kaksi lähdettä.



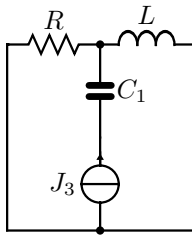
$$E_1 = \frac{10}{\sqrt{2}} / 0^\circ$$

$$E_2 = \frac{5}{\sqrt{2}} / 30^\circ$$

$$I_1 = \frac{E_1 - E_2}{R + j\omega L} = 0,337 / -91,17^\circ \text{ A}$$

$$i_1(t) = 0,477 \sin(300t - 91,17^\circ) \text{ A}$$

Taajuudella 2ω :



$$J_3 = \frac{2}{\sqrt{2}} / 60^\circ$$

$$I_2 = -\frac{j2\omega L}{R + j2\omega L} = 1,385 / -108,23^\circ \text{ A}$$

$$i_2(t) = 1,958 \sin(600t - 108,23^\circ) \text{ A}$$

Kokonaisvirta:

$$i(t) = 0,477 \sin(300t - 91,17^\circ) + 1,958 \sin(600t - 108,23^\circ) \text{ A}$$

Kokonaisteho

$$P = R|I_1|^2 + R|I_2|^2 = 0,568 \text{ W} + 9,584 \text{ W} = 10,152 \text{ W}$$