T-79.3001 Logiikka tietotekniikassa: perusteet

Kokoelma tenteistä 2007-2008, laadittu keväällä 2008.

Italics: Teksti osa tehtävänantoa, kaavat saattavat olla normitekstiä tosin
Vihreä: Kokoelman laatijan vastaus tehtävään

Tehtävä 1 (kalvot 1, 2 kaikki?)
(a) Määrittele seuraavat käsitteet:

- *hylkäminen resoluutiolla,*
- *vapaa muuttujaesiintymä*
- *erojoukko*
- *teoreema,*
- *Herbrand-universumi,*
- *substituutioiden kompositio*
- *jäsennyspuu,*
- *vapaa muuttujaesiintymä*
- *yksikäsitteisten nimien olettamus*
- *disjunktiivinen normaalimuoto,*
- *täydellinen todistusjärjestelmä*
- *yleisin unifioija aksioma,*
- *struktuuri,*
- *nimien yksikäsitteisyys.*

(b)
Mitä tarkoitetaan merkinnällä $\Sigma \models \varphi$?
φ on tosi lausejoukolle Σ, eli looginen seuraavuus

Osoita yksityiskohtaisesti, että jos $\Sigma \cup \{\varphi\} \models \psi$, niin $\Sigma \models \varphi \rightarrow \psi$.
Tee itse.

Mitä tarkoitetaan merkinnällä $\models \varphi$?
φ on pätevä, eli tosi mille tahansa lausejoukolle.

Osoita yksityiskohtaisesti, että jos $\models \varphi$ ja $\models \varphi \rightarrow \psi$, niin ψ.
φ on pätevä, φ -> ψ on pätevä, silloin implikaation totuustaulukon mukaan myös ψ on oltava tosi

Mitä tarkoitetaan merkinnällä $\varphi \equiv \psi$?
Lauseet φ ja ψ ovat ekvivalenttejä.

Osoita yksityiskohtaisesti, että jos $\models \varphi \rightarrow \psi$ ja $\models \neg\varphi \rightarrow \neg\psi$, niin $\varphi \equiv \psi$.
Tee itse.

Mitä tarkoitetaan merkinnällä $\varphi \vee \psi$?
Disjunktiosymboli, tosi jos joko φ tai ψ on tosi

Osoita yksityiskohtaisesti, että jos $\models \varphi \vee \psi$, niin $\models \neg\varphi \vee \neg\psi$.
Tee itse.

Mitä tarkoitetaan merkinnällä $Cn(\Sigma)$?
Lausejoukon Σ loogisten seurvaauksien joukko

Osoita yksityiskohtaisesti, että jos $\Sigma 1 \subseteq \Sigma 2$, niin $Cn(\Sigma 1) \subseteq Cn(\Sigma 2)$.
Tee itse.

Tehtävä 2 (kalvot 3, 9)
Todista semanttisilla tauluilla seuraavat väittämät:
(a) $\models (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge C) \rightarrow \neg(A \wedge \neg B) \wedge (\neg C \rightarrow A)$
(a) $\models (((A \rightarrow B) \rightarrow C) \rightarrow D) \rightarrow (A \rightarrow B \vee D) \wedge (C \rightarrow D)$
(a) $\not\models (\neg A \leftrightarrow B \vee C) \leftrightarrow (A \leftrightarrow \neg B \vee \neg C)$

(a) $\models (A \rightarrow B \vee C) \leftrightarrow (\neg B \wedge \neg C \rightarrow \neg A)$
(a) $\models (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \wedge (C \rightarrow A) \rightarrow (A \rightarrow C) \wedge (C \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$

(b) $\models \exists x(P(x) \vee Q(x)) \leftrightarrow \exists xP(x) \vee \exists xQ(x)$
(b) $\models \exists x(P(x) \rightarrow \forall xP(x))$
(b) $\models \exists x\forall yQ(x, y) \rightarrow \forall y\exists xQ(x, y)$
(b) $\{\forall x\exists y(P(x) \rightarrow Q(y)), \forall xP(x)\} \models \exists zQ(z)$
(b) $\models \exists x(P(x) \vee Q(x)) \rightarrow \exists xP(x) \vee \exists xQ(x)$

Semanttisten taulujen tulee sisältää kaikki välivaiheet !!!

Aika helppoa, semanttiseen taulun juureen AINA lauseen negaatio eli F([lause]).
Jos kaikki polut ristiriidassa niin $\models$ [lause] on tosi.
Jos yksikin polku ei ole ristiriidassa niin $\not\models$ [lause] on tosi.

Tehtävä 3 (kalvot 5,6,8,11)
Johda lauseelle Prenex-normaalimuoto sekä mahdollisimman yksinkertainen klausuulimuoto (eli klausuulijoukko S) ja osoita S toteutumattomaksi resoluutiolla.

$\neg(\forall xP(x) \vee \forall yP(y) \rightarrow \forall x\exists y(P(x) \wedge P(y)))$ [08.2007]
$\neg\forall x\exists y(\exists zR(x, z) \rightarrow \exists vR(y, v))$ [10.2007]
$\neg\forall x\exists y(\exists z\, R(y, z) \rightarrow \exists v\, R(x, v))$ [01.2008]
$\neg\exists x\forall y(\forall z\, R(x, z) \rightarrow \forall x\, R(x, y))$ [03.2008]

$\neg(\exists x\forall yG(y, x) \rightarrow \forall y\exists xG(y, x))$ [05.2007]
=> -(Ex Ay G(y,x) -> Ay Ex G(y,x))
=> -(-Ex Ay G(y,x) V Ay Ex G(y,x))
=> (Ex Ay G(y,x) A -Ay Ex G(y,x))
=> (Ex Ay G(y,x) A Ey Ax -G(y,x))
=> Ex (Ay G(y,x) A Ey Ax -G(y,x))
=> Ey Ex (Ay G(y,x) A Ax -G(y,x))
=> Az Ey Ex (G(z,x) A Ax -G(y,x))
=> Aw Az Ey Ex (G(z,x) A -G(y,w))
on KNMässä
=> Aw Az (G(z,f_1(z)) A -G(f_2(w), w))
=> {{G(z,f_1(z)}, {-G(f_2(w), w)}}

Keksitään (algoritmi kalvoilla 11) unifioija {z/f_2(w), w/f_1(z)}
Substituution jälkeen klausuuli on {{G(f_2(w),f_1(z)}, {-G(f_2(w), f_1(z))}}
josta saadaan välittömästi yhdellä askeleella hylkäys

Tehtävä 4 (Kalvot 10)
I
Tarkastellaan kirjahyllyn sisältöä, joka on kuvattu kaksipaikkaisen predikaatin P(x, y) = "kirjat x ja y sijaitsevat hyllyssä välittömästi peräkkäin". Viitatkoon vakiot b, c ja d tiettyihin Böllin, Carrin ja Dostojevskin teoksiin.

(a) Määrittele kolmipaikkainen predikaatti V (x, y, z) = "kirja y sijaitsee hyllyssä kirjan x jälkeen mutta ennen kirjaa z eli x:n ja z:n välissä" predikaattilogiikalla siten, että määritelmäsi kattaa kaikki yksittäisessä hyllyllä olevat kirjat.

```
All x,y,z (P(x,y) && P(y,z) -> V(x,y,z))
```

(b) Anna laatimallesi määritelmälle Σ malli $S \models \Sigma$, jonka perusteella $\Sigma \cup \{P(b, c), P(c, d)\} \not\models V(d, c, b)$.

```
U = {1,2,3}
a_s = 1;
b_s = 2;
c_s = 3;
P_s = {1,2} {2,3}
P_s = {3,2,1}
```

II

Esitetään luonnolliset luvut 0, 1, 2, . . . muuttujattomilla termeillä 0, s(0), s(s(0)),. . . , jotka rakentuvat vakiosymbolista 0 ja funktiosymbolista s, joka tulkitaan funktioksi s(x) = x + 1 luonnollisille luvuille x.

(a) Määrittele predikaatit D(x) = "x on kolmella jaollinen" ja I (x) = "x ei ole kolmella jaollinen" predikaattilogiikalla siten, että määritelmäsi kattaa kaikki luonnolliset luvut edellä kuvatulla tavalla esitettynä.

```
D(0)
All x (s(s(s(D(x)))) -> D(x) )
I(s(0))
I(s(s(0)))
All x (s(s(s(I(x))) -> I(x))
```

(b) Anna laatimallesi määritelmälle Σ malli S ⊨ Σ, jonka perusteella Σ⊭ ∃x(D(x) ∧ I (x)).

```
U_s = {0,1,2,3,4,5....}
D_s = {0,3,6,9,12,...}
I_s = {1,2,4,5,7,8,10,11...}
```

III

Esitetään mikä tahansa kirjaimista a, b ja c muodostuva äärellinen merkkijono yksipaikkaisten funktiosymbolien a, b ja c sekä tyhjää merkkijonoa tarkoittavan vakiosymbolin e avulla. Näin esim. termi a(x) tarkoittaa merkkijonoa, joka alkaa kirjaimella a ja jatkuu merkkijonona x, ja merkkijonon "baba" esitykseksi saadaaan muuttujaton termi b(a(b(a(e)))).

(a) Määrittele predikaatti L(x, y) = "merkkijono x edeltää sanakirjajärjestyksessä aidosti merkkijonoa y" siten, että määritelmäsi kattaa kaikki äärelliset merkkijonot edellä kuvatulla tavalla esitettynä.

```
Ei jaksa.
```

(b) Anna laatimallesi määritelmälle Σ malli S ⊨ Σ, jonka perusteella Σ⊭ ∃x∃y(L(xy) ∧ L(yx)).

```
Ei jaksa.
```

Tehtävä 5 (kalvot 12)

a)

Selitä, kuinka ehtolauseelle

```
if(B) then {C1} else {C2}
```

voidaan muodostaa heikoin esiehto B1 annetusta jälkiehdosta B2 .

Todistetaan että sekä C1 ja C2 johtavat jälkiehtoon B2 jollain esiehdolla B4 ja B5, eli osoitetaan

$\models_p$ [B4] C1 [B2]

sekä

$\models_p$ [B5] C2 [B2].

Tämän jälkeen voidaan todeta että heikoin esiehto on (B && B4) || (!B && B5)

b)

I (2008 & 2007 tenteissä)

Tarkastellaan seuraavaa ohjelmaa Divide:

```
v = 0;
z = x;
while(z >= y) {
    z = z - y;
    v = v + 1
}.
```

Osoita heikoimpia esiehtoja ja sopivaa invarianttia käyttäen, että

$\models_p$ `[true] Divide [v == x / y],`

missä x / y on osamäärän kokonaisosa jaettaessa x y:llä.

Suoritus loppuu vain jos y > 0.

```
[true]
[0 == 0]
[0*y == x-x]
v = 0;
[v*y == x-x]
z = x;
[v*y == x-z]
while(z >= y) {
    [(v*y == x-z) && (z >= y)]
    [y*v+y == x-z+y]
    [y*(v+1) == x-(z-y)]
    z = z - y;
    [y*(v+1) == x-z]
    v = v + 1
    [y*v == x-z]
}
[(y*v == x-z) && !(z >= y)]
[(y*v == x-z) && (z < y)]
[v == x/y]
```

Invariantti on `(y*v == x-z)`

II (2006 tenteissä)

Tarkastellaan ohjelmaa Diff

```
v=0;
z=0;
while(!(z==y)) {
    z=z+1;
    v=v-1
};
v=v+x;
```

Osoita etttä:

$\models_p$ `[true] Diff [v == x - y]`

```
[true]
[0 == 0]
v=0;
z=0;
[v + z == 0]
while(!(z==y)) {
    [v + z == 0]
    [(v-1) + (z+1) == 0]
    z=z+1;
    [(v-1) + z == 0]
    v=v-1
    [v + z == 0]
};
[v + z == 0 && z == y]
[v + y == 0]
v=v+x;
[v - x + y == 0]
[v == x - y]
```

Invariantti on `[v + z == 0]`