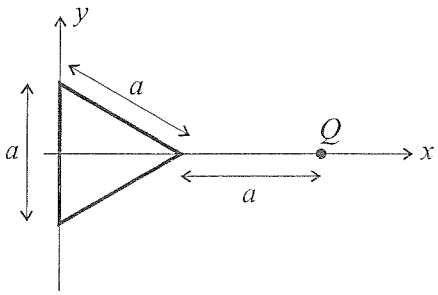
Palauta vähintään yksi nimelläsi varustettu konsepti. Palauta vastauspaperisi mukana *kaikki* saamasi yliopiston konseptiarkit. Tehtäväpaperin saat pitää.
Sallittu oheismateriaali: Sähkömagnetiikka-moniste (version 2007/8 kanssa korjausliite), taskulaskin (myös ohjelmoitavat ja graafiset laskimet käyvät).
Vastaa ENINTÄÄN NELJÄÄN tehtävään.

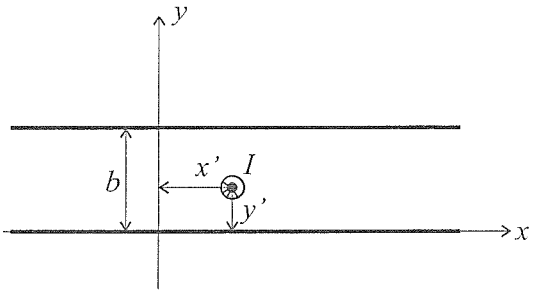
1. Pistevaraus $Q = 1{,}3$ nC ja tasasivuinen johdelankakolmio sijaitsevat kuvan mukaisesti xy-tasolla ilmassa. Laske momenttimenetelmää käyttäen approksimaatio kolmion varausjakautumalle siten, että kuvaat varausjakautumaa kolmella pistevarauksella ja käytät pistesovitusta. $a = 0{,}12$ m.
   Vihje: Hyödynnä tehtävän symmetriaa niin, että tuntemattomia varausamplitudeja on kolmen sijasta vain kaksi.



2. Vapaassa tilassa on varaustiheys $\rho(\bar{\mathbf{r}}) = q\,\delta(x-a)\,\delta(y)\,\mathrm{U}(a^2 - z^2)$. Määritä tätä vastaavan, origossa sijaitsevan multipolikehitelmän pistevaraus- ja dipolimomenttivektoritermit Q ja $\bar{\mathbf{p}}$. Laske dipolin $\bar{\mathbf{p}}$ synnyttämä potentiaali pisteessä $(x,y,z) = (2a,0,0)$. ($a > 0$, $[q] = \mathrm{C/m}$ ja U on yksikköaskelfunktio.)

3. Kahden johdetason välissä on aikaharmoninen viivavirta $\bar{\mathbf{J}}(\bar{\mathbf{r}}) = \bar{\mathbf{u}}_z I\,\delta(x-x')\,\delta(y-y')$. Johda yksinkertaisen summan ratkaisu virran aiheuttamalle sähkökentälle $\bar{\mathbf{E}}(x,y)$. Reunaehdot ovat $E_{\tan}(x,0) = E_{\tan}(x,b) = 0$, ja kenttä etenee virrasta poispäin. Ratkaistava yhtälö on

$$(\nabla^2 + k^2)\bar{\mathbf{E}}(\bar{\mathbf{r}}) = j\omega\mu_0\bar{\mathbf{J}}(\bar{\mathbf{r}}).$$



4. Ilmatäytteinen sylinteriresonaattori on mitoitettu niin, että TE_{111}-resonanssimuodon resonanssitaajuus on kaksi kertaa TM_{010}-muodon resonanssitaajuus. Mikä on TE_{011}-muodon resonanssitaajuus, jos sylinterin tilavuus on 12 cm^3? Mitkä ovat sylinterin mitat? Resonaattori on valmistettu kuparista (hyvä johde).

5. Johdeseinämäisen kuutionmuotoisen onteloresonaattorin tilavuus $V = 20{,}10$ cm^3. Mikä on perusresonanssimuodon sähkökentän suurin arvo, kun resonaattoriin varastoitunut perusmuodon energia $W = 9{,}12$ mJ? Resonaattori on ilmatäytteinen. Voit olettaa, että sähkö- ja magneettikenttiin on varastoitunut sama määrä energiaa: $W_\mathrm{e} = W_\mathrm{m} = \frac{1}{2}W$.

Nablaoperaatiot

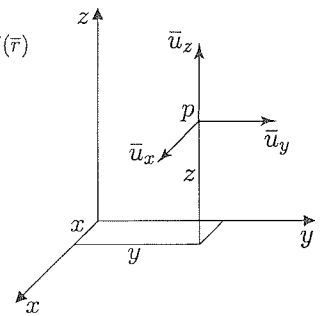
Karteesinen koordinaatisto

$$\nabla f(\overline{r}) = \overline{u}_x \frac{\partial}{\partial x} f(\overline{r}) + \overline{u}_y \frac{\partial}{\partial y} f(\overline{r}) + \overline{u}_z \frac{\partial}{\partial z} f(\overline{r})$$

$$\nabla \times \overline{f} = \begin{vmatrix} \overline{u}_x & \overline{u}_y & \overline{u}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_x & f_y & f_z \end{vmatrix}$$

$$\nabla \cdot \overline{f}(\overline{r}) = \frac{\partial}{\partial x} f_x(\overline{r}) + \frac{\partial}{\partial y} f_y(\overline{r}) + \frac{\partial}{\partial z} f_z(\overline{r})$$

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$



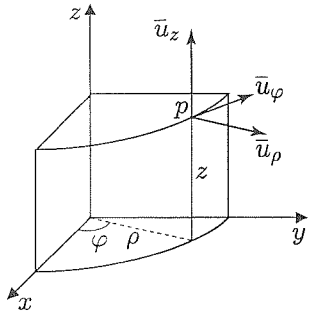
Sylinterikoordinaatisto

$$\nabla f(\overline{r}) = \overline{u}_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} f + \overline{u}_\varphi \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} f + \overline{u}_z \frac{\partial}{\partial z} f$$

$$\nabla \times \overline{f} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \overline{u}_\rho & \rho \overline{u}_\varphi & \overline{u}_z \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_\rho & \rho f_\varphi & f_z \end{vmatrix}$$

$$\nabla \cdot \overline{f} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}(\rho f_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} f_\varphi + \frac{\partial}{\partial z} f_z$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$



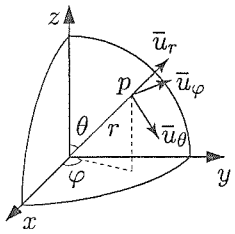
Pallokoordinaatisto

$$\nabla f(\overline{r}) = \overline{u}_r \frac{\partial}{\partial r} f + \overline{u}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} f + \overline{u}_\varphi \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} f$$

$$\nabla \times \overline{f} = \frac{1}{r^2 \sin\theta} \begin{vmatrix} \overline{u}_r & r\overline{u}_\theta & r\sin\theta \overline{u}_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ f_r & r f_\theta & r \sin\theta f_\varphi \end{vmatrix}$$

$$\nabla \cdot \overline{f} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 f_r) + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta f_\theta) + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} f_\varphi$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin\theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$



Koordinaattimuunnokset vektorille $\overline{f}$

Karteesinen ↔ sylinterikoordinaatisto

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, \quad z = z,$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \arctan(y/x), \quad z = z.$$

$$\begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_\rho \\ f_\varphi \\ f_z \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} f_\rho \\ f_\varphi \\ f_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix}.$$

Karteesinen ↔ pallokoordinaatisto

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta,$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \theta = \arctan\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}\right), \quad \varphi = \tan^{-1}\frac{y}{x}$$

$$\begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \cos\theta\cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\sin\varphi & \cos\varphi \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_r \\ f_\theta \\ f_\varphi \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} f_r \\ f_\theta \\ f_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi & -\sin\theta \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix}.$$

Sylinteri ↔ pallokoordinaatisto

$$\rho = r\sin\theta, \quad \varphi = \varphi, \quad z = r\cos\theta,$$

$$r = \sqrt{\rho^2 + z^2}, \quad \theta = \arctan(\rho/z), \quad \varphi = \varphi.$$

$$\begin{pmatrix} f_\rho \\ f_\varphi \\ f_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_r \\ f_\theta \\ f_\varphi \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} f_r \\ f_\theta \\ f_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta & 0 & \cos\theta \\ \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_\rho \\ f_\varphi \\ f_z \end{pmatrix}.$$

Vektori-integraalilaskennan kaavoja

Karteesinen koordinaatisto

$$\overline{d\ell} = \overline{u}_x\, dx + \overline{u}_y\, dy + \overline{u}_z\, dz$$

$$\overline{dS_x} = \overline{u}_x\, dy\, dz$$

$$\overline{dS_y} = \overline{u}_y\, dx\, dz$$

$$\overline{dS_z} = \overline{u}_z\, dx\, dy$$

$$dV = dx\, dy\, dz$$

Sylinterikoordinaatisto

$$\overline{d\ell} = \overline{u}_\rho\, d\rho + \overline{u}_\varphi \rho\, d\varphi + \overline{u}_z\, dz$$

$$\overline{dS_\rho} = \overline{u}_\rho \rho\, d\varphi\, dz$$

$$\overline{dS_\varphi} = \overline{u}_\varphi\, d\rho\, dz$$

$$\overline{dS_z} = \overline{u}_z \rho\, d\rho\, d\varphi$$

$$dV = \rho\, d\rho\, d\varphi\, dz$$

Pallokoordinaatisto

$$\overline{d\ell} = \overline{u}_r\, dr + \overline{u}_\theta r\, d\theta + \overline{u}_\varphi r \sin\theta\, d\varphi$$

$$\overline{dS_r} = \overline{u}_r r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

$$\overline{dS_\theta} = \overline{u}_\theta r \sin\theta\, dr\, d\varphi$$

$$\overline{dS_\varphi} = \overline{u}_\varphi r\, dr\, d\theta$$

$$dV = r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi$$

Gaussin lause $\displaystyle\int_V \nabla \cdot \overline{f}\, dV = \oint_S \overline{f} \cdot \overline{dS}$

Stokesin lause $\displaystyle\int_S \nabla \times \overline{f} \cdot \overline{dS} = \oint_C \overline{f} \cdot \overline{d\ell}$

Vakioita

$$\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12}\, \frac{\mathrm{As}}{\mathrm{Vm}}$$

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\, \frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{Am}}$$

$$k_B = 1.38 \cdot 10^{-23}\, \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}$$

$$e = 1.60 \cdot 10^{-19}\, \mathrm{C}$$