Aalto-yliopisto
Perustieteiden korkeakoulu
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos

Alestalo/Pulkkinen

Mat-1.1040 Matematiikan peruskurssi L4

1. välikoe 22.2.2011 klo 16–19.

Ei laskimia eikä taulukoita.

1. Funktio f on 2π-jaksollinen ja $f(x) = e^{-ix/2}$, kun $-\pi \leq x \leq \pi$. Määritä funktion f kompleksiset Fourier-kertoimet c_n.

2. a) Selitä lyhyesti, miten 2π-jaksollisen funktion Fourier-kerrointen c_n lauseke johdetaan (formaalisti) käyttämällä funktioiden $e_n(x) = e^{inx}$ ortogonaalisuutta L^2-sisätulon suhteen.
b) Johda kaava $\widehat{u'(x)}(\xi) = i\xi\hat{u}(\xi)$, kun $u\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ja u' ovat sileitä ja L^1-integroituvia.

3. a) Osoita, että differentiaaliyhtälön $u'' + 2u' + u = f(x)$ ratkaisu voidaan kirjoittaa Fourier-puolella muodossa $\hat{u}(\xi) = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)$, kun $f \in L^1(\mathbf{R})$ ja
$$\hat{g}(\xi) = \frac{1}{(1+i\xi)^2}.$$
b) Määritä funktio $g(x)$ jollakin tavalla ja esitä ratkaisu $u = u(x)$ konvoluution avulla.

4. Tarkastellaan vaimennettua aaltoyhtälöä
$$\begin{cases} u_{tt} + 2\alpha u_t = c^2 u_{xx}, & 0 < x < \pi,\ t > 0 \\ u(0,t) = 0, & t \geq 0 \\ u_x(\pi,t) = 0, & t \geq 0 \text{ (huomaa derivaatta!)} \\ u(x,0) = f(x), & 0 \leq x \leq \pi \\ u_t(x,0) = 0, & 0 \leq x \leq \pi, \end{cases}$$
jossa $0 < \alpha < c/2$. Johda muuttujien separointia käyttämällä muotoa
$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\alpha t}(A_n \cos(\beta_n t) + B_n \sin(\beta_n t)) \sin(\lambda_n x)$$
oleva formaali ratkaisukaava, määritä kertoimien λ_n, β_n lausekkeet sekä kertoimet A_n, B_n funktion f avulla lausuttuina.

Sekalaisia kaavoja:

- $\widehat{f * g} = \hat{f}\hat{g}$, $\widehat{fg} = (2\pi)^{-n}\hat{f} * \hat{g}$.
- $\hat{h}(\xi) = 1/(a + i\xi)$, kun $h(x) = H(x)e^{-ax}$, $a > 0$ ja
$$H(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

L4, VK1/2011, RATKAISUT / PJA

1.

$$c_m = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ix/2} e^{-imx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(m+1/2)x}\,dx$$

$$= \frac{-1}{2\pi i(m+\frac{1}{2})} \Big/_{-\pi}^{\pi} e^{-i(m+1/2)x} = \frac{-1}{2\pi i(m+1/2)}\left(e^{-i(m+1/2)\pi} - e^{i(m+1/2)\pi}\right)$$

$$= \frac{\sin(m\pi + \pi/2)}{\pi(m+1/2)} = \frac{\cos(m\pi)}{\pi(m+1/2)} = \frac{2\cdot(-1)^m}{(2m+1)\pi}$$

---

2. KTS LUENNOT

---

3. $\widehat{u''} + 2\widehat{u'} + \hat{u} = \hat{f} \iff (i\xi)^2\hat{u} + 2i\xi\hat{u} + \hat{u} = \hat{f}$

$$\Rightarrow \hat{u} = \frac{\hat{f}}{-\xi^2 + 2i\xi + 1} = \hat{f}(\xi)\cdot\underbrace{\frac{1}{(1+i\xi)^2}}_{\hat{g}(\xi)} = \hat{f}(\xi)\,\hat{g}(\xi)$$

$$\hat{g}(\xi) = \hat{h}(\xi)\cdot\hat{h}(\xi) \Rightarrow$$

$$g(x) = (h*h)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} H(x-y)\,e^{y-x}\,H(y)\,e^{-y}\,dy \overset{\text{laske!}}{=} \ldots = H(x)\,x e^{-x}$$

$$\Rightarrow u(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x-y)f(y)\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\,H(x-y)(x-y)\,e^{y-x}\,dy$$

$$= \int_{-\infty}^{x} f(y)(x-y)\,e^{y-x}\,dy = e^{-x}\int_{-\infty}^{x} f(y)(x-y)\,e^{y}\,dy.$$

4. $u(x,t) = F(x)T(t) \Rightarrow F T'' + 2\alpha F T' = F'' T \cdot c^2 \;\Big|: FT$

$$\Rightarrow \frac{T'' + 2\alpha T'}{T} = c^2 \frac{F''}{F} \Rightarrow \frac{F''}{F} = k = \text{VAKIO}$$

Eri tapaukset $\Rightarrow k = -\lambda^2 < 0 \Rightarrow F(x) = A\cos(\lambda x) + B\sin(\lambda x)$

$F(0) = 0 \Rightarrow A = 0 \Rightarrow F(x) = B\sin(\lambda x)$

$F'(\pi) = 0 \Rightarrow B\lambda\cos(\lambda\pi) = 0 \Rightarrow \lambda\pi = \frac{\pi}{2} + m\pi \Rightarrow \lambda = \lambda_m = m + \frac{1}{2}$

$m = 0, 1, 2, \dots$

$$T'' + 2\alpha T' + c^2\lambda_m^2 T = 0$$

$$r^2 + 2\alpha r + c^2\lambda_m^2 = 0 \Leftrightarrow r = \frac{-2\alpha \pm \sqrt{4\alpha^2 - 4c^2\lambda_m^2}}{2} = -\alpha \pm i\beta_m$$

$$\beta_m = \sqrt{c^2\lambda_m^2 - \alpha^2}$$

$$\Rightarrow T(t) = e^{-\alpha t}\left(A\cos(\beta_m t) + B_m\sin(\beta_m t)\right)$$

$$\left(c^2\lambda_0^2 = c^2/4 > \alpha\right)$$

Saadaan:

$$u(x,t) = \sum_{m=0}^{\infty} e^{-\alpha t}\left(A_m\cos(\beta_m t) + B_m\sin(\beta_m t)\right)\sin(\lambda_m x)$$

$$u_t(x,t) = \sum_{m=0}^{\infty} e^{-\alpha t}\Big(\left(-\alpha A_m + \beta_m B_m\right)\cos(\beta_m t) + \left(-\alpha B_m - \beta_m A_m\right)\sin(\beta_m t)\Big)\sin(\lambda_m x)$$

$$u_t(x,t) \equiv 0 \Rightarrow -\alpha A_m + \beta_m B_m = 0 \Rightarrow B_m = \frac{\alpha}{\beta_m} A_m$$

$$u(x,0) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m \sin(\lambda_m x) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m \sin\left(\frac{(2m+1)x}{2}\right) \Rightarrow L = 2\pi$$

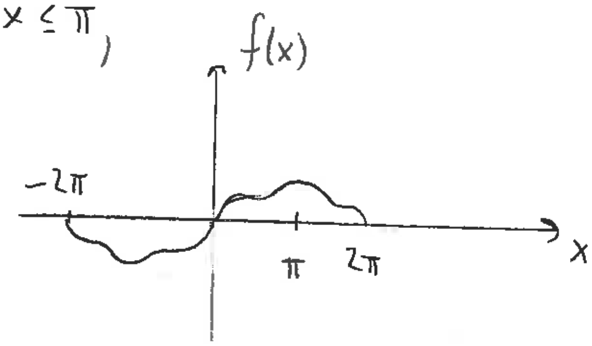
$\Rightarrow$ tarvitaan 4π-jaksollinen Fourier-sarja, jossa parilliset kert. $= 0$

Saadaan jatkamalla f ensin $[0, 2\pi]$:hin parillisena π:n suhteen, sen jälkeen parittomana 0:n suhteen.

Aputulos: Jos f on 4π-jaksollinen, pariton ja lisäksi

$$f(\pi+x) = f(\pi-x), \quad 0 \le x \le \pi,$$

niin $b_{2m} = 0 \quad \forall m.$



Tod.

$$b_{2m} = \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(2m\pi x/2\pi)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(mx)\,dx$$

Tässä f on parillinen pisteen $x=\pi$ suhteen, $\sin(mx)$ pariton pisteen $x=\pi$ suhteen $\Rightarrow$ integraali $= 0$. □

Siis:

$$A_m = \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin\left(\frac{(2m+1)x}{2}\right)dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin((m+1/2)x)\,dx$$