# Mat-1.1320 Matematiikan peruskurssi K2

Heikkinen/Tikanmäki

## 1. Välikoe 22.2.2011

Kokeessa saa käyttää ylioppilaskirjoituksiin hyväksyttyä laskinta.

1. Olkoon $f(x,y) = x^3 + y^2$.
   a) Mihin suuntaan $f$ kasvaa nopeiten pisteessä $(1,2)$ ja mikä on tällöin $f$:n muutosnopeus?
   b) Mikä on $f$:n muutosnopeus pisteessä $(1,2)$ vektorin $i-j$ suuntaan?
   c) Onko $f$:n muutosnopeus johonkin suuntaan $-6$?
2. Etsi ja luokittele funktion $f(x,y) = xye^{-x^2-y^4}$ kriittiset pisteet.
3. Määrää funktion $f(x,y) = xy$ ääriarvot joukossa $2x^2 + y^2 = 1$ Lagrangen kertojien menetelmällä.
4. a) Yhtälöt $x = u^3 + v^3$ ja $y = uv - v^2$ määräävät implisiittisesti funktiot $u = u(x,y)$ ja $v = v(x,y)$. Laske $\frac{\partial u}{\partial x}$ pisteessä, jossa $u = v = 1$.
   b) Sovita paraabeli $y = ax^2$ dataan
   $$\{(x_i, y_i)\} = \{(0,-2), (1,-1), (2,0), (3,3)\}$$
   pienimmän neliösumman menetelmällä.

KI VKI 22.2.2011

1. a.) Funktio kasvaa nopeiten gradientin suuntaan.

$\nabla f(x,y) = 3x^2\bar{i} + 2y\bar{j}$ ~~xxx~~ $\nabla f(1,2) = 3i + 4j$

Muutosnopeus: $\frac{\nabla f(1,2)}{|\nabla f(1,2)|} \cdot \nabla f(1,2) = |\nabla f(1,2)| = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{25} = 5$

b.) Muutosnopeus pisteessä $(1,2)$ suuntaan $v = \nabla f(1,2) \cdot v_0$

$\nabla f(1,2) \cdot \frac{v}{|v|} = 3i + 4j \cdot \frac{i-j}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{3-4}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

c.) i) Koska funktio vähenee nopeiten suuntaan $-\nabla f(1,2)$, on suurin vähenemisnopeus $-5$, joten muutosnopeus ei voi olla $-6$.

ii) Täydet pisteet saa myös, jos osoittaa jonkun pisteen ja suunnan, jossa muutosnopeus on $-6$

2. Kriittiset pisteet löytyvät gradientin nollakohdista.

$f_x = y(1-2x^2)e^{-x^2-y^4} \qquad f_y = x(1-4y^4)e^{-x^2-y^4}$

$\begin{cases} y(1-2x^2) = 0 \\ x(1-4y^4) = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} y = 0 \to x = 0 \\ y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \to x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \end{matrix}$

Pisteet siis: $(0,0)$, $(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}})$ ja $(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \mp\frac{1}{\sqrt{2}})$

Toiset derivaatat:

$$\boxed{H(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}}$$

$f_{xy} = f_{yx} = (4y^4-1)(2x^2-1)e^{-x^2-y^4} = (1-2x^2-4y^4+8x^2y^4)e^{-x^2-y^4}$

$f_{xx} = (-6xy + 4x^3y)e^{-x^2-y^4}$

$f_{yy} = (16xy^7 - 20xy^3)e^{-x^2-y^4}$

$|H(0,0)| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0 \to$ Satulapiste

$|H(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}})| = \begin{vmatrix} -2e^{-\frac{3}{4}} & 0 \\ 0 & -4e^{-\frac{3}{4}} \end{vmatrix} > 0$

ja $f_{xx} < 0 \to$ maksimi

$|H(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \mp\frac{1}{\sqrt{2}})| = \begin{vmatrix} 2e^{-\frac{3}{4}} & 0 \\ 0 & 4e^{-\frac{3}{4}} \end{vmatrix} > 0$

ja $f_{xx} > 0 \to$ minimi

# Mat-1.1331 Matematiikan peruskurssi K2

## 1. välikokeen mallivastaukset

### Tehtävä 3

Määrää funktion $f(x,y) = xy$, suurin ja pienin arvo joukossa $2x^2 + y^2 = 1$ Lagrangen kertojien menetelmällä.

**Ratkaisu** Muodostetaan annetusta funktiosta $f(x,y)$ sekä ehdosta $g(x,y) = 2x^2 + y^2 - 1 = 0$ Lagrangen funktio

$$L(x,y,\lambda) = xy - \lambda(2x^2 + y^2 - 1). \quad \text{(2p)}$$

Ehdosta $\nabla L(x,y,\lambda) = 0$ saamme ratkaistavaksi yhtälöryhmän

$$\begin{cases} y - 4\lambda x = 0 \\ x - 2\lambda y = 0 \\ 2x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases} .$$

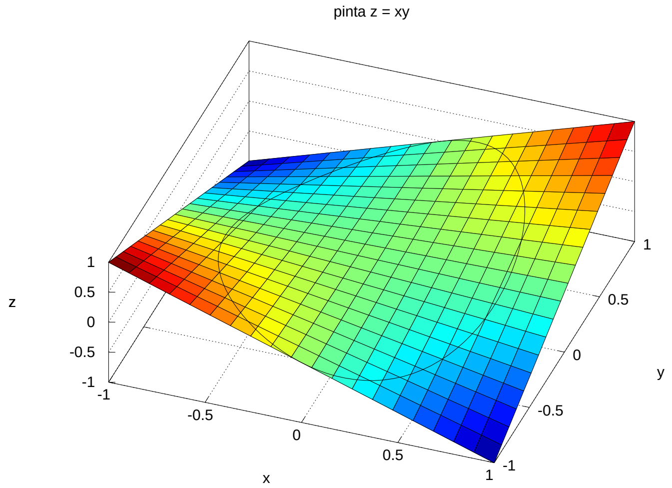
Ratkaistaan $\lambda$ ensimmäisestä, jolloin saamme $\lambda = \dfrac{y}{4x}$, $x \neq 0$. Sijoittamalla tämän seuraavaan, saamme

$$x - \frac{y^2}{2x} = 0 \iff 2x^2 = y^2 \iff x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}y. \quad \text{(2p)}$$

Tehdään vielä sijoitus viimeiseen yhtälöön, josta saamme

$$4x^2 = 1 \iff x = \pm\frac{1}{2} \Rightarrow y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Tutkitaan vielä funktion arvoa kyseisissä pisteissä. Funktio saa suurimman arvonsa, $\frac{1}{2\sqrt{2}}$, ellipsillä $2x^2 + y^2 = 1$ pisteissä $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ja $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ sekä pienimmän arvonsa, $-\frac{1}{2\sqrt{2}}$, pisteissä $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ja $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. (2p)




**Tehtävä 4**

a) Yhtälöt $x = u^3 + v^3$ ja $y = uv - v^2$ määräävät implisiittisesti funktiot $u = u(x, y)$ ja $v = v(x, y)$. Laske $\frac{\partial u}{\partial x}$ pisteessä, jossa $u = v = 1$.

b) Sovita paraabeli $y = ax^2$ dataan

$$\{(x_i, y_i)\} = \{(0, -2), (1, -1), (2, 0), (3, 3)\}$$

pienimmän neliösumman menetelmällä

**Vastaus**

a) Derivoidaan molempia yhtälöitä puolittain $x$:n suhteen ja saamme

$$\frac{\partial x}{\partial x} = \frac{\partial \left(u^3 + v^3\right)}{\partial x} \iff 3u^2 \frac{\partial u}{\partial x} + 3v^2 \frac{\partial v}{\partial x} = 1$$

sekä

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial \left(uv - v^2\right)}{\partial x} \iff v \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial v}{\partial x} - 2v \frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

Pisteessä $(u, v) = (1, 1)$ nämä saavat arvokseen

$$\begin{cases} 3\dfrac{\partial u}{\partial x} + 3\dfrac{\partial v}{\partial x} = 1 \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{cases}.$$

Sijoittamalla alempi ylempään saadaan ratkaisuksi

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{6}. \quad \text{(3p)}$$

b) Muodostetaan kyseinen summa.

$$S(a) = \sum_{i=1}^{4}(ax_i^2 - y_i)^2 = (2)^2 + (a+1)^2 + (4a)^2 + (9a-3)^2 = 98a^2 - 52a + 14. \quad \text{(1p)}$$

Tämä minimoituu, kun

$$\frac{\mathrm{d}\, S(a)}{\mathrm{d}\, a} = 196a - 52 = 0 \iff a = \frac{13}{49}. \quad \text{(1p)}$$

Siis käyräksi saamme

$$y = \frac{13}{49}x^2. \quad \text{(1p)}$$

Vaihtoehtoisesti voimme myös minimoida ensin $a$:n ja sen jälkeen sijoittaa kyseiset datapisteet.

$$\frac{\mathrm{d}\, S(a)}{\mathrm{d}\, a} = \sum_{i=1}^{4} 2x_i^2(ax_i^2 - y_i) = 0 \iff a = \frac{\sum_{i=1}^{4} x_i^2 y_i}{\sum_{i=1}^{4} x_i^4}.$$

Nyt sijoitetaan vain datapisteet ja saamme vastaukseksi

$$a = \frac{0^2 \cdot (-2) + 1^2 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 + 3^2 \cdot 3}{0^4 + 1^4 + 2^4 + 3^4} = \frac{0 - 1 + 0 + 27}{0 + 1 + 16 + 81} = \frac{13}{49}.$$

Alla olevasta kuvasta voimme arvioida kyseisen käyrän soveltuvuutta sovitukseksi. Sovitus käyrälle $y = ax^2 + b$ (tai vaihtoehtoisesti käyrälle $y = ax^2 + bx + c$) antaisi jo huomattavasti paremman esityksen kyseisille datapisteille.